

تمرين رقم 1

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - 1}{\sqrt{x} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \sqrt{x} - \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{2x+3} - \sqrt{2+x}}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+1}, \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x\sqrt{x} - \sqrt[3]{x+4} - 6}{\sqrt{x} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x+1}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x+2} + x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt[3]{3x+5} - 3}{\sqrt{x} - x}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} E\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x E\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x E(3x) + x - 1}{x^2 + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan \frac{1}{\sqrt{2x} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[5]{x} \sqrt[15]{x^2}}{3\sqrt[3]{x} - 1 - \sqrt[3]{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\pi}{4} \right), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan\left(\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt[3]{1-x^3}}\right)$$

تمرين رقم 2

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x + b}{x^2 - 1} & x < 1 \\ f(1) = a \\ f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 1}{x - 1} & x > 1 \end{cases}$$

حدد العددين a, b كي تكون f متصلة في $x_0 = 1$

تمرين رقم 3

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} t E(t); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} t E(t) \quad \text{أحسب النهايتين}$$

$$(2) \quad \text{استنتج النهايتين} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{E\left(\frac{1}{x}\right) + x}{E\left(\frac{1}{x}\right) - x} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{E\left(\frac{1}{x}\right) + x}{E\left(\frac{1}{x}\right) - x}$$

تمرين رقم 3

ليكن n عدد من $\mathbb{N}^* - \{1\}$

$$\text{أحسب} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$$

$$\text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{(2-x)^n - 1}$$

تمرين رقم 4

أدرس إذا كانت f تقبل تمديد بالاتصال في النقطة x_0 في الحالات التالية :

$$(1) \quad x_0 = 0 \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$$

$$(2) \quad x_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sin(\cos x)}$$

تمرين رقم 5

$$(1) \quad \text{بين أن} \quad 2 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$$

$$(2) \quad \text{حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة:} \quad \arctan x + \arctan(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}$$

$$(3) \quad \text{حل المعادلة:} \quad \sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{3-x} = 2$$

تمرين رقم 6

لتكن f دالة متصلة على $[0,1]$ بين أن :

$$(\exists c \in]0,1[) / f(c) = \frac{1}{c} + \frac{1}{c-1}$$

تمرين رقم 7

لتكن f دالة متصلة من $\mathbb{R}$ نحو المجال $]-\infty, 1]$ و g دالة متصلة من $\mathbb{R}$ نحو المجال $[1, +\infty[$ وبحيث :

$$(\exists (a,b) \in \mathbb{R}^{+2}) : a < b \quad \text{و} \quad f(a) = a \quad \text{و} \quad g(b) = b$$

$$\text{بين أن} \quad (\exists c \in [a,b]) / f(c)g(c) = c$$

تمرين رقم 8

$$\text{بين أن المعادلة} \quad 2 \arctan x = \frac{\sqrt{3} - x}{x+1} \quad \text{تقبل على الأقل حلا في المجال} \quad]0, \sqrt{3}[$$

تمرين رقم 9

$$\text{لتكن} \quad f \text{ دالة معرفة بما يلي:} \quad f(x) = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\hookrightarrow \text{حدد } D_f \text{ وأحسب} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x}$$

$$\hookrightarrow \text{أدرس رتبة الدالة } f$$

$$\hookrightarrow \text{بين أن } f \text{ تقبل دالة عكسية } f^{-1} \text{ وعرفها}$$

$$\hookrightarrow \text{حل في } D_f \text{ المعادلة} \quad f(x) = f^{-1}(x)$$

تمرين رقم 10

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$a \in \mathbb{R}^{+*} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} f(x) = a - x - \sqrt{a^3 - x^3} & x \leq a \\ f(x) = 2 \arctan \frac{x-a}{x+a} & x > a \end{cases}$$

1- أدرس بعناية اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$

2- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0 = a$

3- أدرس رتبة الدالة f