

تمرين 1

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $f(x) = x(E(2x) - 2E(x))$.
أدرس اتصال f على $\mathbb{R}$

تمرين 2

أدرس على $\mathbb{R}$ اتصال الدالتين :
(1) $f(x) = E(x)\sin(x)$ (2) $g(x) = E(x)\sin(\pi x)$

تمرين 3

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} f(x) = (x-1)E\left(\frac{1}{x-1}\right) ; x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

(1) أدرس اتصال الدالة f .
(2) أحسب $SM \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x)$

تمرين 4

لتكن f دالة عددية تحقق $\exists k \in \mathbb{R}_+^* ; \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |f(x) - f(y)| \leq k \times |x - y|$
بين أن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$

تمرين 5

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث f متصلة في 0 وتحقق :
 $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}) : f(x+y) = f(x)f(y)$
(1) تحقق أن $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}) : f(y) = f(y-x)f(x)$
(2) نفترض أن f لا تنعدم على $\mathbb{R}$. أحسب $f(0)$.
(3) بين أن f متصلة على $\mathbb{R}$.

تمرين 6

(1) لتكن $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ دالة عددية بحيث $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$ أثبت أن f دالة غير مكبورة .
هل العكس صحيح ؟
(2) أثبت أنه إذا كانت f دالة غير مكبورة وتزايدية فإن $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$

تمرين 7

لتكن f دالة متصلة على $[0, 1]$ بحيث $f(1) = f(0) = 0$ و $(\forall x \in [0, 1]) : f(x) \geq 0$.
بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists c \in [0, 1]) : f(c) = f(c + \frac{1}{n})$

تمرين 8

لتكن f دالة معرفة من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$ بحيث : f متصلة على $\mathbb{R}^+$ و $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : f(x) < x$
(1) بين أن $f(0) = 0$.
(2) بين أن : $(\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^{*2})) (\exists M \in [0, 1]) (\forall x \in [a, b]) : f(x) \leq Mx$

تمرين 9

لتكن f دالة متصلة على $[0, 1]$ بحيث $f(0) = f(1)$.
(1) نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$
بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[0, \frac{1}{2}]$
(2) نعتبر الدالة u المعرفة بما يلي : $u(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$
(a) بين أن $\sum_{0 \leq k \leq n-1} u(\frac{k}{n}) = 0$.

(b) استنتج أن المعادلة $u(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$.

تمرين 10

لتكن f دالة متصلة وموجبة على $\mathbb{R}^+$ بحيث $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} < 1$
بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{R}^+$.

تمرين 11

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = x^{n+2} - 8x^{n+1} + 7x^n + 36$
(1) نضع $h(x) = 2f(x) - f(x+1) - f(x-1)$ بين أنه $(\exists c \in]1,7[): h(c) = 0$
(2) استنتج أنه توجد 3 نقط A و B و C من المنحنى C_f أفصليها a و b و c على التوالي بحيث :
(a) B منتصف $[AC]$
(b) $b - a = 1$

تمرين 12

(1) بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ المعادلة $\arccos(x) - x^n = 0$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0,1[$.
(2) قارن العددين a_n و $\frac{1}{2}$.
(3) بين أنه : $(\forall n \in \mathbb{N}^*): a_{n+1} > a_n$.

تمرين 13

لتكن f دالة عددية متصلة على $[a,b]$ حيث $\forall x \in [a,b]: f(x) > 0$.
أثبت أن $\exists m > 0, f(x) \geq m$

تمرين 14

لتكن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ بحيث $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \end{cases}$ و $ab < 0$
(1) بين أن: $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$
(2) استنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{R}$.

تمرين 15

لتكن f دالة معرفة على $]0,+\infty[$
نفترض أن f تزايدية على $]0,+\infty[$ و الدالة g المعرفة بـ $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ تناقصية على $]0,+\infty[$.
(1) ليكن $x_0 \in]0,+\infty[$. بين أن $(\forall x > x_0): 0 \leq f(x) - f(x_0) \leq (x - x_0)g(x_0)$
و $(\forall x < x_0): (x - x_0)g(x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq 0$
(2) بين أن f متصلة على $]0,+\infty[$.

تمرين 16

$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty \end{cases}$ مع f دالة متصلة على $]a,b[$
(1) بين أنه: $\exists (\alpha, \beta) \in]a,b[/ f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$
(2) استنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]a,b[$.
(3) لتكن g دالة متصلة على $]a,b[$. بين $\exists c \in]a,b[/ f(c) = g(c)$

(4) بين

$$\exists c \in]a, b[/ \sqrt{\frac{b-c}{c-a}} - \sqrt{\frac{c-a}{b-c}} = \sqrt{(b-c)(c-a)}$$

تمرين 17

$$f(x) = x - 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} \quad \text{نعتبر الدالة } f$$

(1) حدد حيز تعريف الدالة f .

(2) حل في IR^+ المعادلة $f(x) = x$

(3) (a) بين أن الدالة f تزايدية قطعاً من المجال $[0, +\infty[$

(b) بين أن الدالة f تقابل من المجال $[0, +\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده

(c) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين 18

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}x-1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) \quad \text{نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة بما يلي :}$$

(1) حدد حيز تعريف الدالة f .

(2) نضع $t = 2\text{Arc tan}(\sqrt{2}x-1)$ لكل x من IR .

$$f(x) = \begin{cases} 2\text{Arc tan}(\sqrt{2}x-1) & ; 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ \pi - 2\text{Arc tan}(\sqrt{2}x-1) & ; x > \sqrt{2} \\ -\pi - 2\text{Arc tan}(\sqrt{2}x-1) & ; x < 0 \end{cases} \quad \text{بين أن :}$$

(3) حل في IR المعادلة : $f(x) = 2\text{Arc tan}(1-\sqrt{2})$

(4) ليكن g قصور الدالة f على المجال $[\sqrt{2}, +\infty[$.

(a) بين أن g تقابل من $[\sqrt{2}, +\infty[$ نحو مجال J .

(b) حد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين 19

$$f(x) = \frac{\text{Arcsin}(x)}{\text{Arc cos}(x)} \quad \text{نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة بما يلي :}$$

(1) حدد حيز تعريف الدالة f واحسب النهايات عند محداث D_f .

(2) (a) بين أن $\forall x \in [-1, 1] : \text{Arc sin}(x) + \text{Arc cos}(x) = \frac{\pi}{2}$

(b) استنتج أن f تقابل من $[-1, 1]$ نحو مجال J يجب تحديده ثم حدد $f^{-1}(x)$

تمرين 20

$$\begin{cases} f(x) = x \text{Arc tan}\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right); x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad \text{لتكن } f \text{ الدالة العددية المعرفة بما يلي :}$$

(1) ادرس زوجية الدالة f .

(2) ادرس اتصال f في الصفر.

(3) ليكن $x > 0$ ، بين أن : $f(x) = \frac{\pi x}{2} - \frac{x}{2} \text{Arc tan}(x)$ واستنتج صيغة مبسطة لـ : $f(x)$ على IR^+ .

$$(4) \text{ نعتبر المعادلة : } \text{Arc tan}\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}{x}\right) = \frac{5\pi}{12} \quad (E)$$

بين أن : $x > 0$; $\text{si } f(\sqrt{x}) = \frac{5\pi\sqrt{x}}{12}$ $(E) \Leftrightarrow$ أعط حلول المعادلة (E) في IR^+ .

تمرين 21

حل في IR المعدلتين :

$$\text{Arc tan}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) + \text{Arc tan}(x) = \frac{\pi}{2} \quad (2) \quad \text{Arc tan } 2x + \text{Arc tan}(3x) = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

تمرين 22

نعتبر في IR المعادلة $(E) : \arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$

- (1) بين المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا وأن هذا الحل ينتمي إلى $]0,1[$.
(2) حل المعادلة (E) .

تمرين 23

أثبت المتساويات التالية :

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4} \quad (1) \quad (\text{لاحظ أن } 0 \leq \arctan(\frac{1}{5}) \leq \frac{\pi}{8})$$

$$\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$(\forall x \in [-1,1]) : \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi \quad (3)$$

$$(\forall x > 0) : \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

$$(\forall x < 0) : \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad (5)$$

$$(\forall x < 0) : \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad (6)$$

$$(\forall x \in]0,1]) : \arcsin(2x-1) + 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

تمرين 24

أحسب $\arctan 2 + \arctan 3$

تمرين 25

ارسم التمثيل المبياني للدالة f : $f(x) = \text{Arc cos}(\cos x) + \frac{1}{2} \text{Arc cos}(\cos 2x)$

تمرين 26

نعتبر العدد $x = \arcsin \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

أحسب $\cos(4x)$ واستنتج قيمة x .