



I. النهايات (تذكير)

نشاط 1 :

1 ذكر بتعريف : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ 2 ذكر بتعاريف التالية : أ - $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_g$ ب - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ج - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3 ذكر بالأشكال الغير المحددة .

4 ذكر ببعض خاصيات النهايات و الترتيب .

جواب :

1 نذكر بتعريف : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

1. تعريف 1:

f دالة معرفة بجوار x_0 . (أي $]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\} \subset D_f$ مع $r > 0$).نقول إن $f(x)$ يؤول إلى العدد الحقيقي ℓ عندما يؤول x إلى a لنعني أن : $f(x) - \ell$ يؤول إلى 0 عندما يؤول x إلى a .أو أيضا : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.نرمز لذلك ب : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

2 نذكر بالتعاريف التالية :

أ - تعريف ل : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_g$.

2. تعريف 2 :

f دالة عددية معرفة على يسار x_0 . (أي $]x_0 - r, x_0[\subset D_f$ مع $r > 0$).نقول إن $f(x)$ يؤول إلى العدد الحقيقي ℓ_g عندما يؤول x إلى a على اليسار لنعني أن $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, 0 < x_0 - x < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell_g| < \varepsilon$.نرمز لذلك ب : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_g$ أو أيضا $\lim_{\substack{x \rightarrow x \\ x < x_0}} f(x) = \ell_g$.ب - تعريف ل : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ 3. تعريف 3 : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ f دالة معرفة بجوار $-\infty$. (أي $] -\infty, b] \subset D_f$).نقول إن $f(x)$ يؤول إلى العدد الحقيقي ℓ عندما يؤول x إلى $+\infty$ لنعني أن : $\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \alpha < -B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ نرمز لذلك ب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ج - تعريف ل : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 4. تعريف 4 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ f دالة معرفة بجوار $+\infty$. (أي $]b, +\infty[\subset D_f$).نقول إن $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ لنعني أن : $\forall A > 0, \exists B > 0, \alpha > B \Rightarrow f(x) > A$ نرمز لذلك ب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



(3) الأشكال الغير المحددة هي :

$$(1) (-\infty) + (+\infty) ; (+\infty) + (-\infty) (2) 0 \times (\pm\infty) (3) \frac{\pm\infty}{\pm\infty} (4) \frac{0}{0} (5) 0^0$$

(4) نذكر بعض خاصيات النهايات و الترتيب .

f و g و h دوال عددية حيث :

- إذا كان $f(x) \leq g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow ?} g(x) = +\infty$
- إذا كان $f(x) \leq g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow ?} g(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = -\infty$
- إذا كان $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = \lim_{x \rightarrow ?} g(x) = \ell$ فإن $\lim_{x \rightarrow ?} h(x) = \ell$

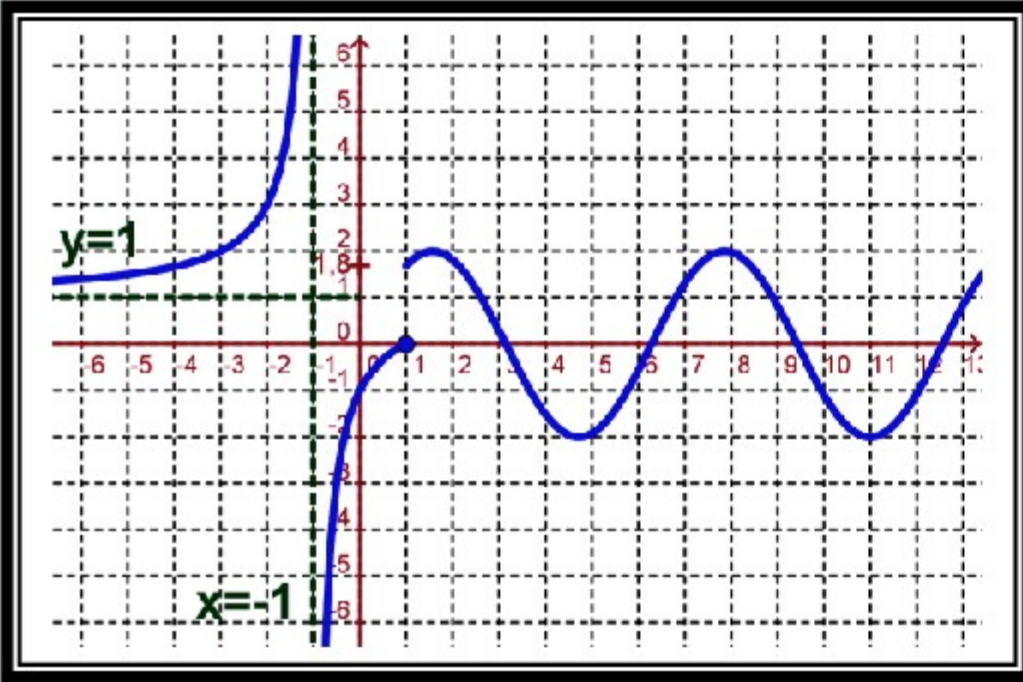
نشاط 2 :

1. تمرين 5 :

الرسم التالي يمثل منحنى دالة f .

أ- حدد مبيانيا D_f مجموعة تعريف الدالة f .

ب- استنتج مبيانيا نهايات f عند محداث D_f و كذلك في 1.



2. تمرين 1 :

أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5 + 1)^3 (3x + 2)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + |x + 2|$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{4-2x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{4x^2 - 8x}$

3. تمرين 2 :

حدد a علما أن f لها نهاية في 3 حيث f معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-3}{2-\sqrt{x+1}} & ; x > 3 \\ f(x) = \frac{a}{x-1} & ; x \leq 3 \end{cases}$$

4. تمرين 3 :

أحسب : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \cos x}{1 + x^2}$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1}$

5. تمرين 4 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-|x-1|}$

أ- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

ب- أحسب نهايات f عند محداث D_f .

II. اتصال دالة عددية في نقطة x_0 :

01. نشاط 1 :

المنحنيات التالية تمثل الدوال f_i مع $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. نأخذ النقطة التي أفصولها $x_0 = 1$.

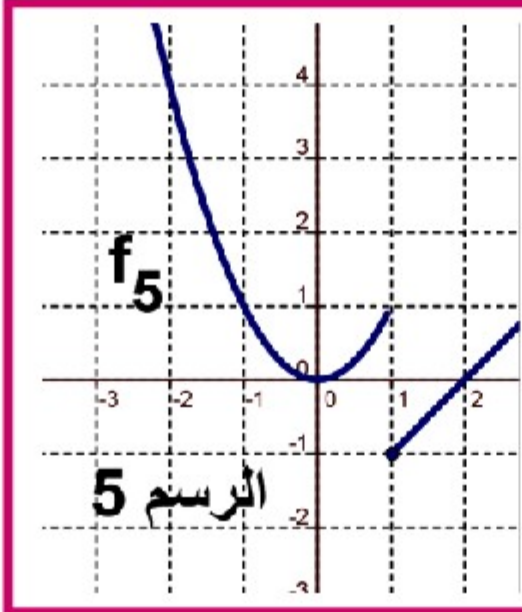
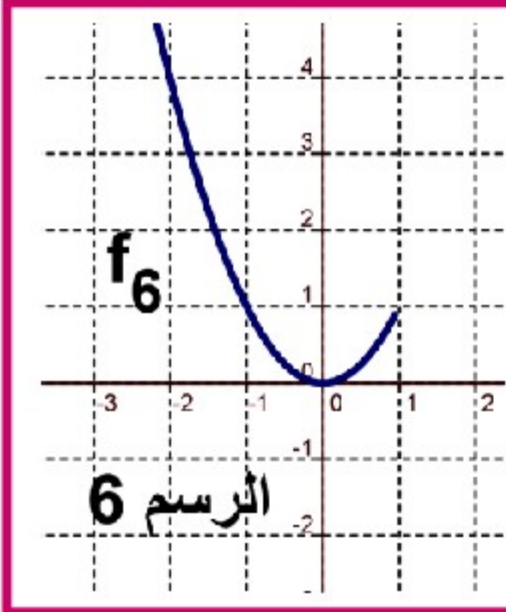
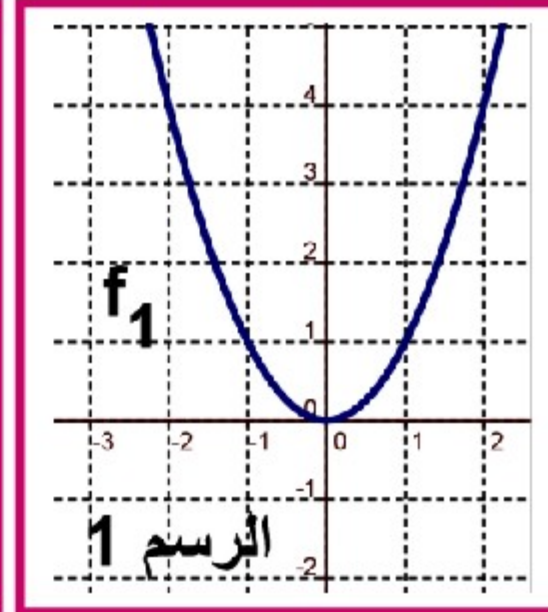
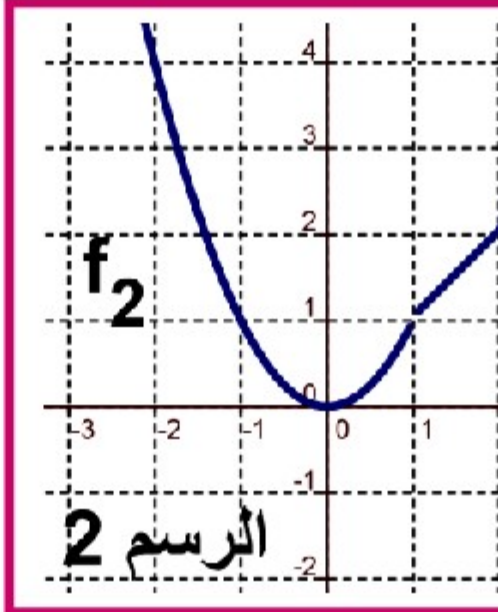
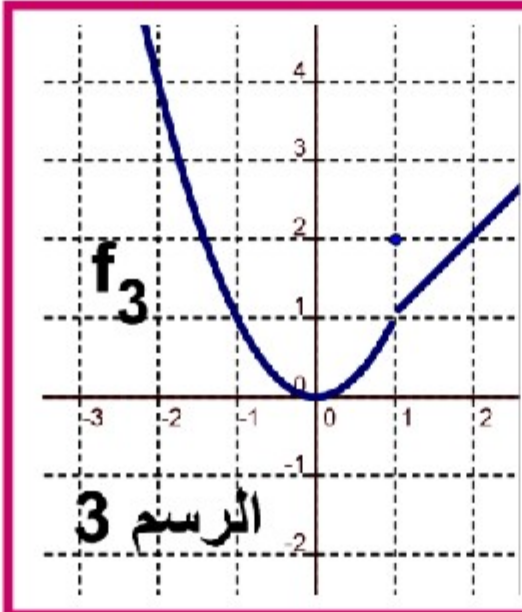
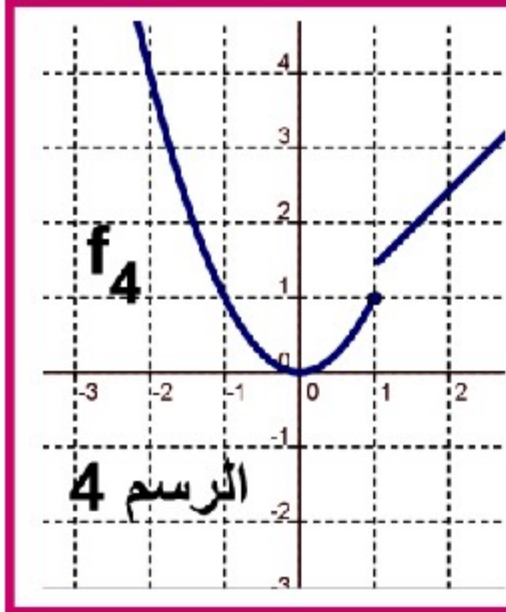


1) نأخذ النقطة التي أفصولها $x_0 = 1$ ماذا تلاحظ ؟

2) استنتج مبيانيا $\lim_{x \rightarrow 1} f_i(x)$ مع $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

3) الرسم 1 و 7 يمثلان دالتين متصلتين في النقطة $x_0 = 1$ وفي الحالات الأخرى غير متصلة في النقطة $x_0 = 1$.

4) أعط تعريف لاتصال دالة في نقطة x_0 .



02. تعريف 1 :

f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $I_{x_0} =]x_0 - r, x_0 + r[$ ($r > 0$) معرفة على **مجال مفتوح** I و x_0 من I .
 f متصلة في x_0 يكافئ : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

03. تعريف 1 :

f دالة عددية معرفة على **مجال مفتوح** I و x_0 من I .
 f متصلة في x_0 يكافئ : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

III. الاتصال على اليمين والاتصال على اليسار في نقطة x_0

01. تعريف 1 - 2 :

- f دالة عددية معرفة على $I_d = [x_0, x_0 + r[$ حيث $r > 0$. f متصل على يمين في x_0 يكافئ : $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$
- f دالة عددية معرفة على $I_g =]x_0 - r, x_0]$ حيث $r > 0$. f متصل على يسار في x_0 يكافئ : $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$

02. أمثلة :



نأخذ النشاط السابق أدرس مبياناً اتصال بعض من f على يمين و يسار النقطة $x_0 = 1$ مع $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

03. خاصية :

دالة f متصلة في x_0 يكافئ f متصل على يسار و على يمين x_0 .

IV. التمديد بالاتصال في النقطة x_0 le prolongement par continuité

01. تذكير :

E و F و G ثلاث مجموعات f و g دالتان عدديتان حيث : $f : E \rightarrow G$ و $g : F \rightarrow G$.

إذا كان $F \subset E$ و $\forall x \in F : f(x) = g(x)$.

- f تسمى تمديد بالاتصال (prolongement) لـ g .
- g تسمى قصور (restriction) لـ f على F . نكتب : $g = f|_F$.

02. تعريف و خاصية :

f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $I_{x_0}^* =]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$ مع $r > 0$. حيث :

f غير معرفة في x_0 .

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

الدالة g المعرفة بـ : $\begin{cases} g(x) = f(x) ; x \in D_f, x \neq x_0 \\ g(x_0) = \ell \end{cases}$ هي متصلة في x_0 .

الدالة g تسمى تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة x_0 .

03. مثال :

$f(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1}$ لدينا : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|(|x| - 1)}{|x| - 1} \lim_{x \rightarrow 1} |x| = 1$.

و بالتالي الدالة g المعرفة بـ : $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ g(1) = 1 \end{cases}$ هي تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة $x_0 = 1$.

كذلك الدالة h المعرفة بـ : $\begin{cases} h(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ h(-1) = 1 \end{cases}$ هي تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة $x_0 = -1$.



- كذلك الدالة k المعرفة ب: $\begin{cases} k(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ k(-1) = k(1) = 1 \end{cases}$ هي تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة $x_0 = -1$ وفي $x_0 = 1$.

ملحوظة : يمكن كتابة الدالة k على الشكل التالي : $k(x) = |x|$

V. اتصال دالة على مجال

01. تعريف:

- دالة متصلة على مجال مفتوح $I =]a; b[$ (يكافئ f متصلة في كل نقطة x_0 من I).
- دالة متصلة على مجال $I = [a, b]$ (يكافئ f متصلة على $]a, b[$ و متصلة على يمين a و متصلة على يسار b).
- دالة متصلة على مجال $[a, +\infty[$ (يكافئ f متصلة في كل نقطة x_0 من $]a, +\infty[$ و f متصلة على يمين في a).

02. مثال:

لنعتبر الدالة: $f(x) = x^2 + 3x$.

بين أن f متصلة على المجال المفتوح $I =]1; 5[$.

VI. اتصال الدوال الاعتيادية:

01. خاصية:

- كل دالة حدودية فهي متصلة على مجموعة تعريفها $D_f = \mathbb{R}$.
- كل دالة جذرية فهي متصلة على مجموعة تعريفها D_f .
- $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ متصلتين على $D_f = \mathbb{R}$.
- الدالة: $f(x) = \tan x$ متصلة على $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- الدالة: $f(x) = \sqrt{x}$ متصلة على مجموعة تعريفها $D_f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.

VII. دالة الجزء الصحيح :

01. تعريف: (تذكير)

الدالة f التي تربط كل عنصر x من $\mathbb{R}$ بالعدد الصحيح النسبي الوحيد p الذي يحقق $p \leq x < p+1$. تسمى الدالة الجزء الصحيح ويرمز لها ب E أو أيضا $[]$ نكتب $f(x) = [x] = p$ أو $f(x) = E(x) = p$. تسمى الدالة الجزء الصحيح

02. نشاط:

(1) أنشئ منحنى الدالة $f(x) = E(x)$.

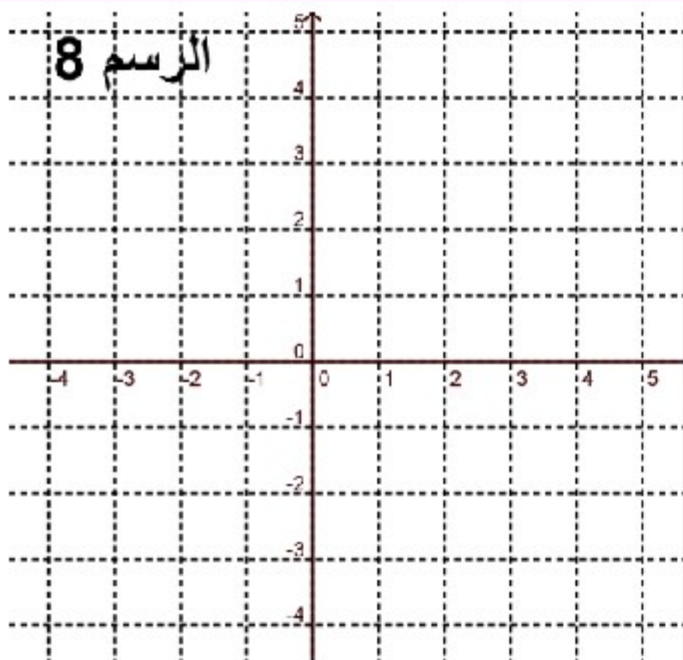
(2) هل f متصلة على يمين في 0 و 1 و 2 و 3 و -1 و -2 .

(3) هل f متصلة على يسار في 0 و 1 و 2 و 3 و -1 و -2 .

(4) هل f متصلة في 0 و 1 و 2 و 3 و -1 و -2

(5) هل f متصلة على $[0; 1[$ و $[1; 2[$ و $[2; 3[$

(6) أعط الخاصية.





03. خاصية:

- دالة الجزء الصحيح متصلة على اليمين في p وغير متصلة على اليسار في p (إذن هي غير متصلة في p).
- دالة الجزء الصحيح متصلة على كل المجالات التي هي على شكل: $[p, p+1[$ (مع $p \in \mathbb{Z}$)

VIII. صورة مجال بدالة متصلة :

01. نشاط:

نأخذ النشاط أول الدرس و الرسم رقم 1 الذي يمثل الدالة: $f(x) = x^2$

- استنتج مبيانيا صور جميع الأعداد التي تنتمي إلى القطعة $[0, 2]$
- استنتج مبيانيا : $f([-1, 0])$ و $f([-1, 2])$. أعط الخاصية.

02. خاصية:

- صورة قطعة $[a, b]$ بدالة متصلة f هي قطعة (تكون على شكل $[m, M]$ مع m و M هي القيمة الدنيا والقيمة القصوى على التوالي ل f على المجال $[a, b]$). (أو أيضا : $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$ و $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$)
- صورة مجال I بدالة متصلة f هي مجال $J = f(I)$.
- ملاحظة : $f([a, b]) = [m, M]$.

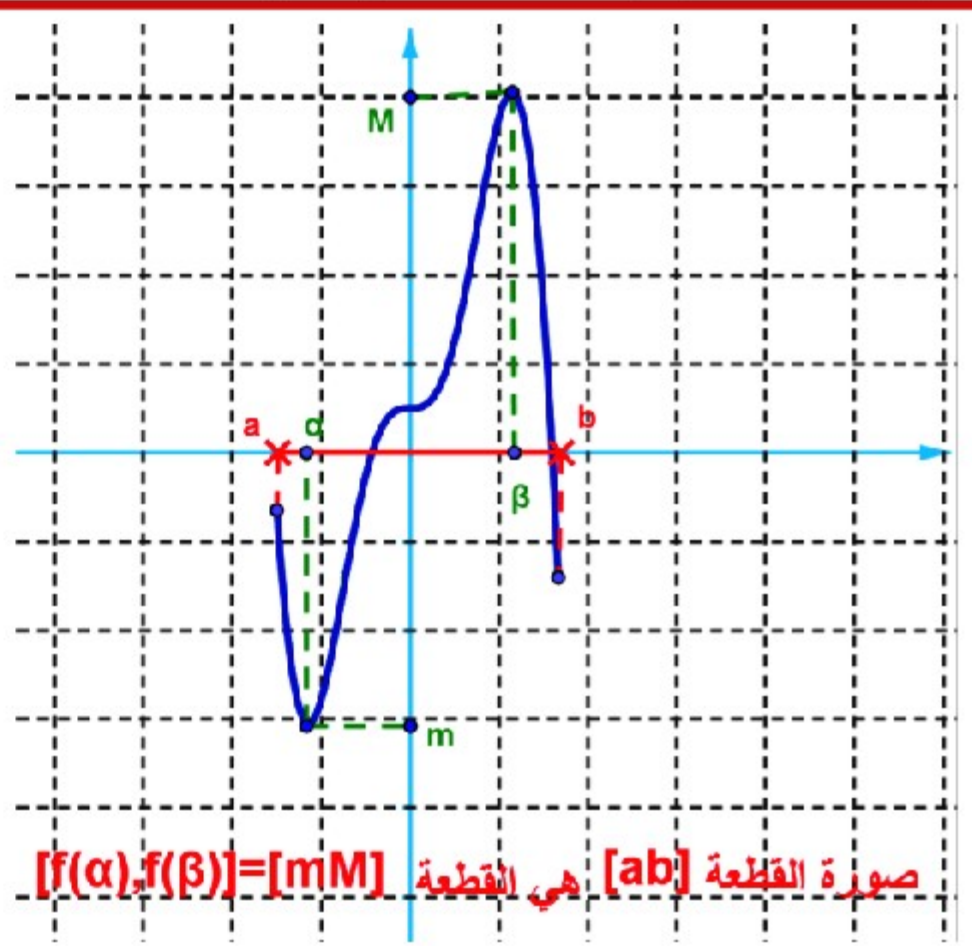
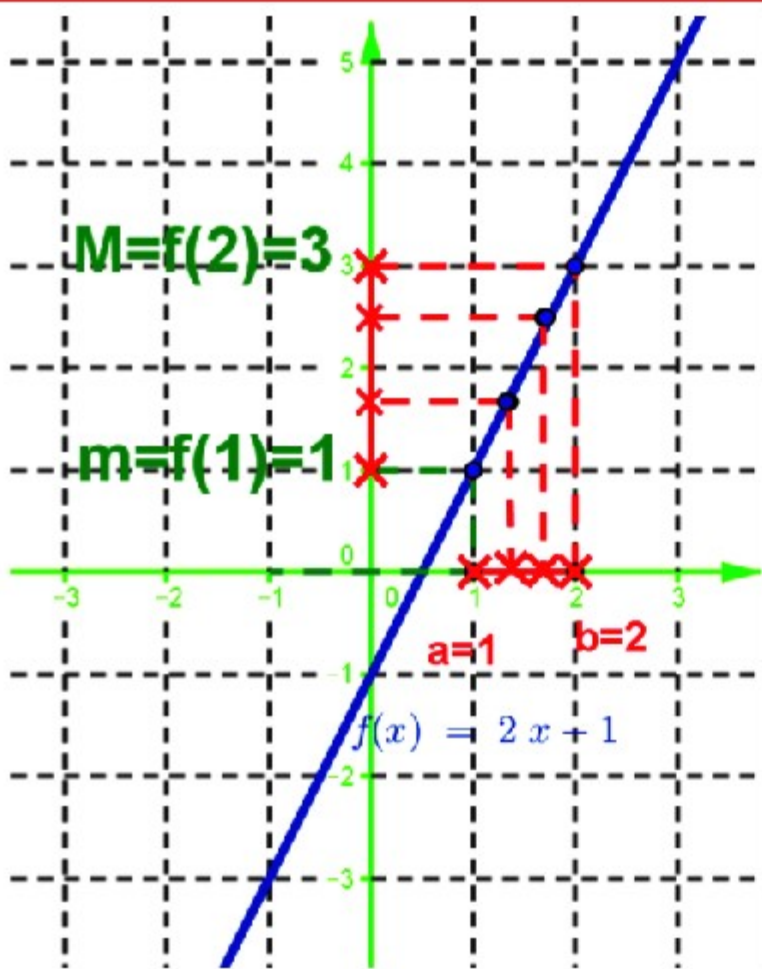
مثال : 2 $f(x) = 2x - 1$ لدينا مبيانيا : $f([1, 2]) = [1, 3]$

$$f([1, 2]) = [1, 3]$$

03. مثال : 1

نضع : $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$ و $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$

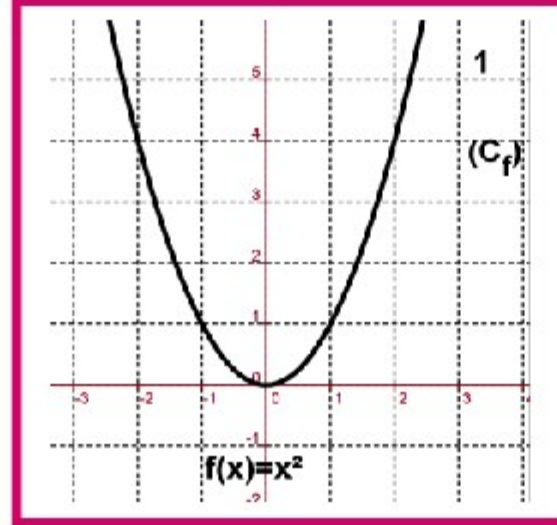
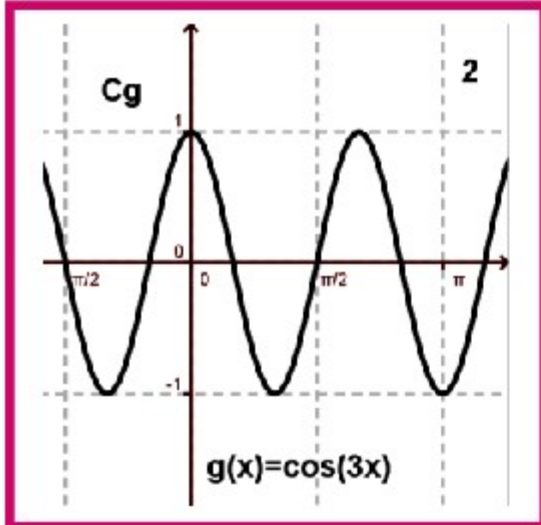
$$\exists (\alpha, \beta) \in I^2 / m = f(\alpha) \text{ و } M = f(\beta)$$



صورة القطعة $[ab]$ هي القطعة $[f(\alpha), f(\beta)] = [m, M]$

IX. مبرهنة القيم الوسيطة: théorème des valeurs intermédiaires

01. نشاط:



نأخذ $a = 1$ و $b = -2$ في الرسم 1؛ $a = 0$ و $b = \pi$ (الرسم 2)

(1) استنتج مبيانيا $f(a)$ و $f(b)$. (الرسم 1)

(2) نأخذ عدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ هل يوجد على الأقل

عنصر c من $[a, b] = [-2, 1]$ حيث $f(c) = k$: (الرسم 1)

(3) أعط الخاصية:

02. خاصية:

f دالة متصلة على القطعة $[a, b]$.

▪ لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصر c من $[a, b]$ حيث $f(c) = k$.

03. برهان:

نضع $f([a, b]) = [m, M]$ لأن f متصلة على $[a, b]$.

حالة 1: $f(a) \leq f(b)$

▪ $k \in [m, M] = f([a, b])$ إذن $k \in [f(a), f(b)] \subset [m, M]$

ومنه: $\exists c \in [a, b] / k = f(c)$

إذن: كل عدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصر c من $[a, b]$ حيث $f(c) = k$.

04. نتائج:

▪ بما أن: صورة قطعة $[a, b]$ بدالة متصلة هي القطعة: $f([a, b]) = [m, M]$ إذن $k \in f([a, b]) = [m, M]$.

▪ إذا كان: $f(a) \times f(b) < 0$ أي $f(a)$ و $f(b)$ (احدهما موجب و الآخر سالب) ومنه: $k = 0 \in f([a, b]) = [m, M]$ ومنه يوجد

عنصر c من $[a, b]$ حيث $f(c) = k = 0$

▪ نتيجة ($f(a) \times f(b) < 0$): المعادلة: $x \in [a, b] / f(x) = 0$ تقبل على الأقل حل على $[a, b]$.

▪ إذا كانت f رتيبة قطعا على $[a, b]$ فإن c وحيد. ومنه المعادلة: $x \in [a, b] / f(x) = 0$ تقبل حل وحيد على $[a, b]$.

X. دالة متصلة و رتيبة قطعا:

01. نشاط: f دالة متصلة و رتيبة قطعا. لدينا صور المجالات الآتية

المجال I	f متصلة و تزايدية قطعا نحدد: المجال f(I)	f متصلة و تناقصية قطعا نحدد: المجال f(I)	المجال I	f متصلة و تزايدية قطعا نحدد: المجال f(I)	f متصلة و تناقصية قطعا نحدد: المجال f(I)
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$	$]a, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$
$]a, b[$	$]f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a) [$	$] -\infty, a]$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(a) [$	$] f(a), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$



$\left] \lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \right[$	$] -\infty, a[$	$\left[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b) \right]$	$] a, b]$
$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$] -\infty, +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$] a, b[$
			$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a) \right]$	$\left[f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$] a, +\infty[$

02. نتيجة :

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على المجال $[a, b]$

- فإنه لكل عدد محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد عدد وحيد c من $[a, b]$ حيث : $f(c) = k$.
- إذا كان $f(a) \times f(b) < 0$ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد .

XI. العمليات على الدوال المتصلة:

01. خاصية: (تقبل)

I مجال ضمن المجموعة $\mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$).

- إذا كانت f و g دالتين متصلتين على المجال I فإن الدوال: $f+g$ و $f \times g$ و αf ($\alpha \in \mathbb{R}$) متصلة على I .
- إذا كانت f و g دالتين متصلتين على المجال I و g لا تنعدم على المجال I فإن الدوال: $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ متصلة على I .

02. مثال:

لنعتبر الدوال التالية المعرفة ب: (1) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1} + \cos(x)$ (2) $g(x) = (x^2 + 3x - 2) \times \sqrt{x}$

(1) حدد مجموعة تعريف واتصال كل دالة من الدوال السابقة.

جواب

(1) نحدد مجموعة تعريف:

الدالة $x \rightarrow \cos x$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R}$.

الدالة $x \rightarrow \frac{2x+1}{x-1}$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

إذن الدالة $x \rightarrow \frac{2x+1}{x-1} + \cos x$ معرفة ومتصلة على $D_f = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

الدالة $x \rightarrow x^2 + 3x - 2$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R}$.

الدالة $x \rightarrow \sqrt{x}$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$. إذن الدالة $x \rightarrow (x^2 + 3x - 2) \sqrt{x}$ معرفة ومتصلة على

$D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$

XII. اتصال مركبة دالتين متصلتين:

تذكير: $I \xrightarrow{f} f(I) \subset J$ و $J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ و $f(I) \subset J$

$g \circ f: I \xrightarrow{f} f(I) \subset J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$



01. خاصية:

لتكن f و g دالتين عدديتين.
إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J حيث: $f(I) \subset J$ فإن الدالة $g \circ f$ متصلة على I .

02. مثال: أدرس اتصال الدالة $f(x) = \sin(2x+1)$.

الدالة $x \rightarrow 2x+1$ متصلة على $\mathbb{R}$.
الدالة $x \rightarrow \sin x$ متصلة على $\mathbb{R}$ و $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. إذن الدالة: $x \rightarrow \sin(2x+1)$ متصلة على $\mathbb{R}$. (لأنها مركبة دالتين متصلتين)

03. نتائج:

- الدالة $f(x) = \sin(ax+b)$ و $g(x) = \cos(ax+b)$ دالتان متصلتان على $\mathbb{R}$.
- الدالة $h(x) = \tan(ax+b)$ متصلة في كل x تحقق ما يلي $ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- f دالة موجبة و متصلة على المجال I فإن الدالة $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ متصلة على I .

XIII. الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة على قطعا على مجال:

01. نشاط: $f(x) = x^2$ على $I = [0; +\infty[$

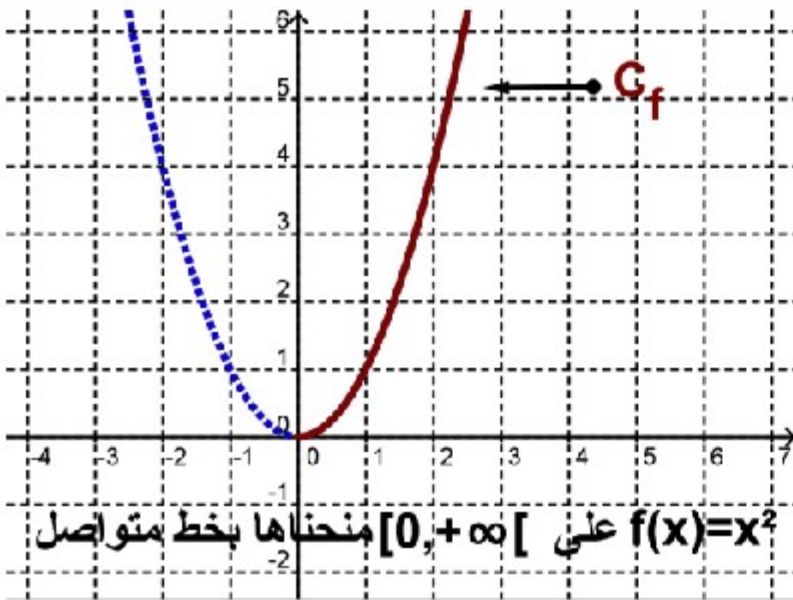
- مبيانيا هل الدالة f متصلة و رتيبة قطعا على المجال $I = [0; +\infty[$ ؟
- استنتج مبيانيا $J = f(I)$ (أي صورة المجال I ب f).
- هل لكل y من $J = f(I)$ له سابق وحيد c من I ؟
- استنتج طبيعة التطبيق f .
- لنعتبر المعادلة: $x \in I = [0; +\infty[/ f(x) = y$:
استنتج عدد حلول المعادلة (E) .

02. خاصية:

- f دالة عددية متصلة و رتيبة قطعا على مجال I و $y \in f(I)$.
- الدالة f هي تقابل من I إلى $f(I)$.
 - المعادلة: $x \in I / f(x) = y$ تقبل حل وحيد على I .

03. برهان:

- بما أن صورة مجال I بدالة متصلة f هو المجال $f(I)$ إذن الدالة f شمولية من I نحو $f(I)$.
- نبين أن f تباينية من I نحو $f(I)$.
- ❖ نفترض أن f تزايدية قطعا على I .
- أي نبين: $\forall x, x' \in I : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ أو أيضا: $\forall x, x' \in I : x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
- ليكن x و x' من I حيث $x \neq x'$ (أي $x < x'$ أو $x > x'$).
حالة 1: $x < x'$
إذن $f(x) < f(x')$ (لأن f تزايدية قطعا على I)
إذن $f(x) \neq f(x')$
- حالة 2: $x > x'$
إذن $f(x) > f(x')$ (لأن f تزايدية قطعا على I)
إذن $f(x) \neq f(x')$





خلاصة : $\forall x, x' \in I : x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ أي f تباينية من I نحو $f(I)$ حالة f تزايدية قطعاً على I .

❖ نفترض أن f تناقصية قطعاً على I . بنفس الطريقة نبين أن f تباينية من I نحو $f(I)$.

خلاصة : الدالة f هي تقابل من I إلى $f(I)$.

04. تعريف:

f تقابل من I إلى J . الدالة g المعرفة بما يلي:

$$g : J \rightarrow I$$

$$y \rightarrow g(y) = x$$

مع $f(x) = y$ تسمى الدالة العكسية للدالة f ونرمز لها: $g = f^{-1}$

05. ملاحظة:

$$f : I \rightarrow J = f(I)$$

▪ الدالة f معرفة كما يلي:

$$x \rightarrow f(x) = y$$

$$f^{-1} : J = f(I) \rightarrow I$$

▪ الدالة f^{-1} معرفة كما يلي:

$$y \rightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = y \\ x \in I \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(y) = x \\ y \in J \end{array} \right.$$

$$\forall y \in J : f \circ f^{-1}(y) = y. \forall x \in I : f^{-1} \circ f(x) = x$$

$$\forall x \in J : f \circ f^{-1}(x) = x \quad \forall y \in J : f \circ f^{-1}(y) = y \quad \text{كذلك على الشكل التالي :}$$

06. خاصيات الدالة العكسية: (تقبل)

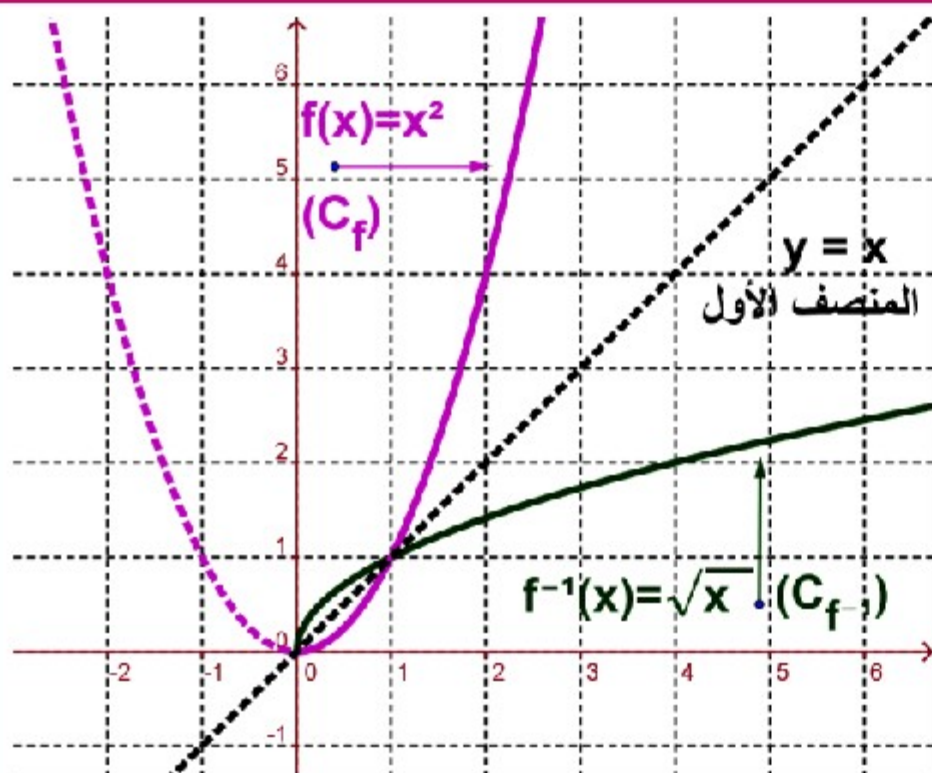
f دالة عددية متصلة ورتيبة قطعاً على مجال I و $J = f(I)$. f^{-1} الدالة العكسية لـ f .

1. الدالة f^{-1} متصلة على المجال $J = f(I)$. (تقبل)

2. الدالة f^{-1} رتيبة قطعاً على المجال J ولها نفس رتبة f على I .

3. $(C_{f^{-1}})$ منحنى الدالة f^{-1} و (C_f) منحنى الدالة f متماثلان بالنسبة للمستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ في معلم متعامد

ممنظم (المستقيم (D) يسمى المنصف الأول)



07. مثال: لنعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = x^2$

1 أ - مبيانيا هل f متصلة على $I = [0; +\infty[$.

ب - استنتج رتبة f على I .

ج - حدد: $J = f(I)$.

د - هل f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال يجب تحديده.

2 حدد: f^{-1} . (C_f) منحنى الدالة f . $(C_{f^{-1}})$ منحنى الدالة f^{-1} .



08. مفردات :

الدالة العكسية f^{-1} المحصل عليها تسمى كذلك الجذر من الرتبة 2 . و نرمز لها ب: $f^{-1} = \sqrt{\quad}$ أو باختصار : $f^{-1} = \sqrt{\quad}$

XIV. الدالة قوس الظل : la fonction arctangente

01. خاصية :

الدالة $f(x) = \tan x$ تقابل من $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ إلى $J = \mathbb{R}$.

دالتها f^{-1} العكسية تسمى الدالة قوس الظل ونرمز لها ب : $f^{-1} = \arctan$.

لدينا : $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$x \mapsto f^{-1}(x) = \arctan x$$

02. برهان :

لدينا الدالة $f(x) = \tan x$ متصلة على $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ و تزايدية قطعا على $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ لأن $f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$ إذن f

تقابل من $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ إلى $f(I) = \mathbb{R}$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$.

03. نتائج :

لدينا : $f : \mathbb{R} \rightarrow I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$x \mapsto f(x) = \arctan x$$

مجموعة تعريف الدالة $f(x) = \arctan x$ هي $D_f = \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} ; -\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$$

الدالة $f(x) = \arctan x$ متصلة و تزايدية على $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \tan x = y \\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \arctan y = x \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \tan(\arctan x) = x$$

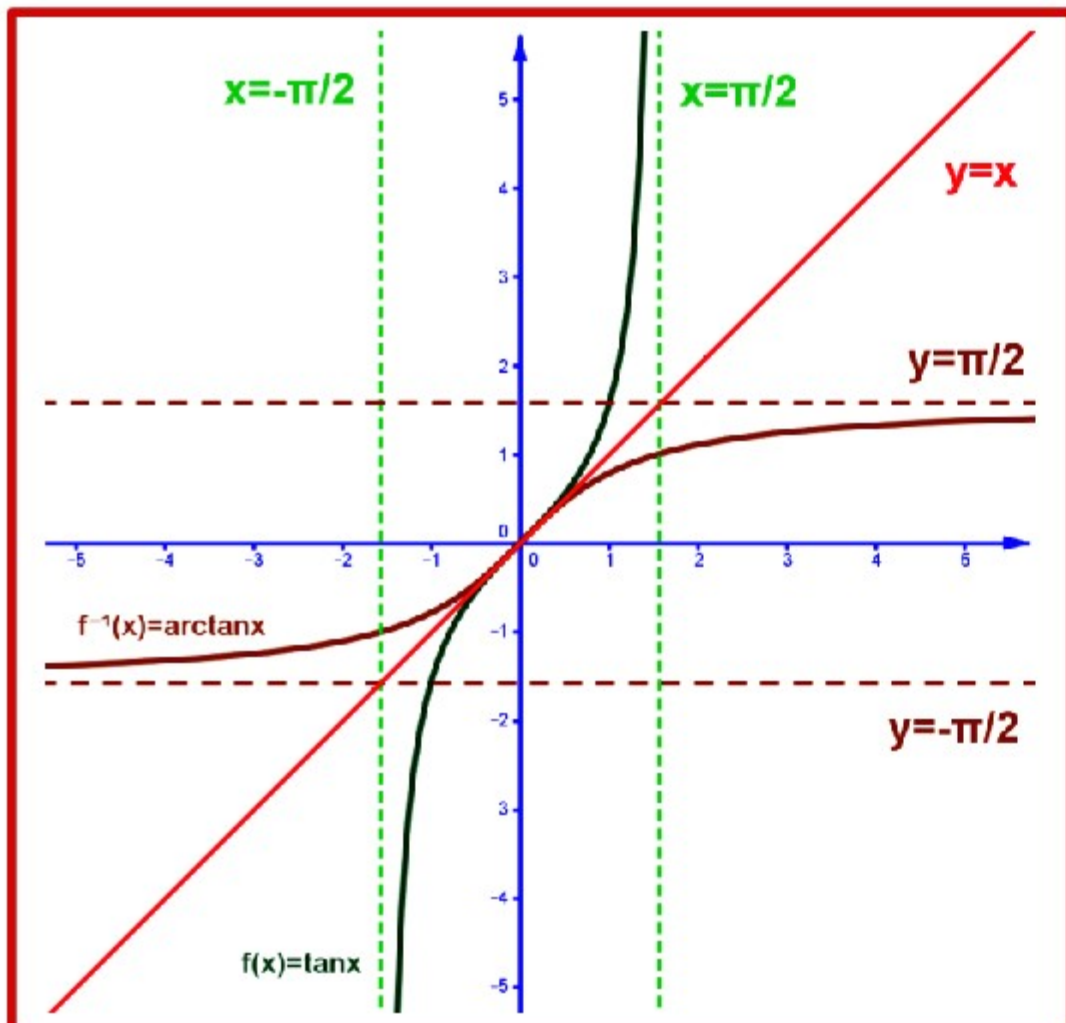
$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[; \arctan(\tan x) = x$$

منحنى $(C_{f^{-1}})$ للدالة $f^{-1}(x) = \arctan x$ هو مماثل (C_f)

منحنى الدالة $f(x) = \tan x$ بالنسبة للمنصف الأول في

معلم متعامد ممنظم .

(المنصف الأول هو المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$) (D) .





04. تمرين تطبيقي :

• $f(x) = \arctan \frac{1}{x-1}$ حدد D_f مجموعة تعريف f .

• أحسب : $f(0)$ و $f(2)$ و $f(1+\sqrt{3})$ و $f\left(1+\frac{1}{\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)}\right)$.

• أحسب : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

XV. دالة الجذر من الرتبة n

01. نشاط:

$n \in \mathbb{N}^*$. لنعتبر الدالة $f(x) = x^n$ على المجال $I = [0; +\infty[$.
بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} على المجال J حدده.

02. مفردات:

- الدالة العكسية f^{-1} تسمى الدالة الجذر من الرتبة n .
- الدالة العكسية f^{-1} يرمز لها ب: $f^{-1} = \sqrt[n]{}$.
- نكتب: $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ أو أيضا $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$.
- حالة: $n = 1$ لدينا $f^{-1}(x) = \sqrt[1]{x} = x$ (حالة غير مهمة).
- حالة: $n = 2$ لدينا $f^{-1}(x) = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ (الدالة تسمى باختصار الجذر المربع).
- حالة: $n = 3$ لدينا $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ (الدالة تسمى باختصار الجذر المكعب أو الجذر الثالث).

03. تعريف وخاصية:

- n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.
- الدالة $f(x) = x^n$ متصلة و تزايدية قطعا على $I = [0; +\infty[$.
- f تقابل من I إلى $J = f(I) = [0; +\infty[$ و دالتها العكسية f^{-1} تسمى الدالة الجذر من الرتبة n و نرمز لها: $f^{-1} = \sqrt[n]{}$.
- نكتب: $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ أو أيضا: $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$.
- العدد: $\sqrt[n]{a}$ يسمى الجذر من الرتبة n للعدد الحقيقي الموجب a .

04. خاصية:

- $\sqrt[n]{0} = 0$; $\sqrt[n]{1} = 1$. $\sqrt[n]{x^n} = x$ و $(\sqrt[n]{x})^n = x$; $\forall x \geq 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.
- منحنى $(C_{f^{-1}})$ لدالة $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ هو مماثل (C_f) منحنى الدالة $f(x) = x^n$ بالنسبة للمنصف الأول في معلم متعامد ممنظم (المنصف الأول هو المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$: (D)).



05. نتائج:

- $\forall a \in \mathbb{R}^+ ; \forall b \in \mathbb{R}^+ ; \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$
- $\forall a \in \mathbb{R}^+ ; \forall b \in \mathbb{R}^+ ; \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a \leq b$

XVI. العمليات على الجذور من الرتبة n.

01. خاصيات:

- $a \geq 0$ و $b \geq 0$ و n و m من $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$
- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$
- $(b > 0) ; \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ و $(b > 0) ; \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a}$ و $\sqrt[n \times m]{a^m} = \sqrt[n]{a}$

02. مثال:

بسط: $\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}} \times \sqrt[15]{3^{11}}$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}} \times \sqrt[15]{3^{11}} = \sqrt[3 \times 5]{81} \times \sqrt[15]{3^{11}}$$

لدينا :

$$= \sqrt[15]{3^4 \times 3^{11}} = \sqrt[15]{3^{15}} = 3$$

خلاصة : $\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}} \times \sqrt[15]{3^{11}} = 3$

XVII. بعض خاصيات الدوال التي هي على شكل: $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$.

01. خاصيات (تقبل)

- f دالة عددية موجبة على مجال I. n من $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$
- إذا كانت f متصلة على I فإن $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ متصلة على I.
- إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ و $l \geq 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$
- إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$
- تبقى الخاصيات صحيحة إذا كان: $x \rightarrow x_0^-$; $x \rightarrow x_0^+$; $x \rightarrow \infty$

02. تمرين تطبيقي:

لنعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = \sqrt[4]{x+1}$

(1) حدد D_f مجموعة تعريف f.

(2) أحسب: $f(-1)$; $f(15)$; $f(0)$

(3) أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

XVIII. القوى الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعاً:

01. نشاط:

$$(1) \text{ بين أن : } (3^2)^{\frac{1}{5}} = \left((3)^{\frac{1}{5}} \right)^2$$

جواب:

$$\text{لدينا : } (3^2)^{\frac{1}{5}} = 9^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{9} \text{ و } \left((3)^{\frac{1}{5}} \right)^2 = (\sqrt[5]{3})^2 = \sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{9}$$

02. كتابة جديدة :

$$\text{من خلال : } (3^2)^{\frac{1}{5}} = \left((3)^{\frac{1}{5}} \right)^2 = 3^{\frac{2}{5}} \text{ سنكتب : } (3^2)^{\frac{1}{5}} = \left((3)^{\frac{1}{5}} \right)^2$$

03. خاصية :

ليكن $a \in \mathbb{R}^{+*}$ و $r \in \mathbb{Q}^*$.إذا كان : $r = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ مع n و n' من $\mathbb{N}^*$ و m و m' من $\mathbb{Z}$ فإن $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$.

05. برهان :

لدينا :

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[n]{a^m} \right)^{n'} &= \sqrt[n]{a^{m \times n'}} \\ &= \sqrt[n]{a^{m' \times n}} ; \left(\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \right) \\ &= a^{m'} \end{aligned}$$

$$\text{ومنه : } \left(\sqrt[n]{a^m} \right)^{n'} = a^{m'} \text{ إذن : } \sqrt[n']{\left(\sqrt[n]{a^m} \right)^{n'}} = \sqrt[n']{a^{m'}} \text{ ومنه : } \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$$

$$\text{خلاصة : } \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$$

04. تعريف :

$$r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^* \text{ (مع } n \in \mathbb{N}^* \text{ و } m \in \mathbb{Z} \text{) و } x \in \mathbb{R}^{+*}$$

الكتابة $\sqrt[n]{x^m}$ نرسم لها ب : $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ أو أيضاً ب : $\sqrt[n]{x^m} = x^r$ أما x^r يسمى القوة الجذرية للعدد x ذات الأس r .

$$x^r = x^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{x} \right)^m = \sqrt[n]{x^m} \quad \square$$

05. أمثلة :

$$(1) \text{ مثال 1 : أكتب على شكل } x^r \text{ ما يلي : } \left(\sqrt[5]{7} \right)^{11} \text{ و } \sqrt[8]{3^5} \text{ و } \left(\sqrt[9]{21} \right)^{-11} \text{ و } \sqrt[13]{2^{-15}} \text{ و } \left(\sqrt[5]{3} \right)^{-32}.$$

$$(2) \text{ مثال 2 : أكتب بطريقة أخرى الأعداد التالية : } \sqrt[4]{3^5}; \sqrt[4]{3^{-5}}; \sqrt{7^3}; \sqrt[5]{11}; \sqrt[3]{8}.$$



06. ملاحظة:

- تعريف الأس في $\mathbb{Q}$ هو تمديد لتعريف الأس في $\mathbb{Z}$.
- لدينا : $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^1} = \sqrt[n]{a}$, $\forall a > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. بمأن : $\sqrt[n]{0} = 0$ يمكن أن نستخدم أن : $0^{\frac{1}{n}} = 0$.
- الدالة $f(x) = (x-2)^{\frac{1}{3}}$ هي معرفة على $D_f =]2, +\infty[$ يمكن تمديد الدالة f في $x_0 = 2$ بالدالة g في حيث

$$\begin{cases} g(x) = f(x) = (x-2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x-2} & ; x > 2 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

07. خاصيات القوى الجذرية :

x و y من $\mathbb{R}^{+*}$ و r و r' من $\mathbb{Q}^*$. لدينا :

- $x^r > 0$
- $x^r = x^{r'} \Leftrightarrow r = r'$
- $x^r \times y^r = (x \times y)^r$ و $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$
- $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$ و $(x^r)^{r'} = x^{r \times r'}$ و $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$ و $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

08. مثال: بسط ما يلي.

$$A = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5 \times \left(4^{-\frac{1}{2}}\right) \times \left(8^{\frac{2}{3}}\right) \quad (1)$$

$$B = \frac{\sqrt[3]{7} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}} \quad (2)$$

$$A = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5 \times \left(4^{-\frac{1}{2}}\right) \times \left(8^{\frac{2}{3}}\right) = (2)^{\frac{-5}{3}} \times (2^2)^{\frac{-1}{2}} \times (2^3)^{\frac{2}{3}} = (2)^{\frac{-5}{3}} \times (2^{-1}) \times (2^2) = (2)^{\frac{-5}{3}-1+2} = 2^{-\frac{2}{3}}$$

$$B = \frac{\sqrt[3]{7} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}} = \frac{7^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}} = \frac{7^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}} = 7^{1+\frac{1}{4}} = 7^{\frac{5}{4}}$$