هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

المادة : الرياضيات الشعبة : علوم رياضية	الموضوع : تصحيح الفرض رقم 2 الدورة 1	الأستاذ : المانتي

التمرين الأول الأعداد العقدية

1- أ- لدينا:

$(E)\ \frac{1}{2}z^3-(1+i)z^2+2(1+i)z-4i=0$

و $z_0=2i$

نتحقق أن z_0 حل للمعادلة (E)

$\frac{1}{2}(z)^3-(1+i)z_0^2+2(1+i)z_0-4i$

$=\frac{1}{2}(2i)^3-(1+i)(2i)^2+2(1+i)2i-4i$

$=-4i+4(1+i)+4i(1+i)-4i$

$=-4i+4+4i+4i-4-4i$

$=0$

وعليه z_0 حل للمعادلة (E)

ب- لدينا $(z-2i)(\frac{1}{2}z^2+\alpha z+\beta)$

$=\frac{1}{2}z^3+(\alpha-i)z^2+(\beta-2i\alpha)z-2i\beta$

$\begin{cases}\alpha-i=-1-i\\ \beta-2i\alpha=2+2i\\ -2i\beta=-4i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=2\end{cases}$

وعليه (E) تصبح:

$\frac{1}{2}z^2-z+2=0$ أي $z=2i$

$\Delta=-3$

إذن للمعادلة $\frac{1}{2}z^2-z+2$ حلين:

$z_1=1-i\sqrt{3}$

$z_2=1+i\sqrt{3}$

وعليه $S_E=\{2i,\ 1-i\sqrt{3},\ 1+i\sqrt{3}\}$

ج) 1- لدينا: $\frac{z_C}{z_A}=\sqrt{\frac{2i}{1+i\sqrt{3}}}$

$\frac{z_C}{z_A}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$\arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ و $\left|\frac{z_C}{z_A}\right|=1$

إذن: $\arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right)\equiv\frac{\pi}{6}(2\pi)$ و $OA=OC$

أي $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})\equiv\frac{\pi}{6}(2\pi)$ و $OA=OC$

ومنه OAC مثلث متساوي الساقين في O

و: $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

ب- لتكن D منتصف [AC] أي:

$d=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}+2}{2}i$

D منتصف [AC] و OAC مثلث متساوي الساقين

$(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC})\equiv\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})\ [2\pi]$

$(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC})\equiv\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

$\arg(d)\equiv(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OD})\ [2\pi]$

$\equiv(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD})\ [2\pi]$

$\equiv\arg c-\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

$\equiv\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

$\arg(d)\equiv\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

ج- تبيان: $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

$\arg(d)\equiv\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{Re(d)}{|d|}$

$\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{Im(d)}{|d|}$

لدينا $|d|=\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

3) أ- لدينا: $o' = R_1(A, -\frac{\pi}{2})$

إذن: $z'_o - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_o - z_A)$

$z'_o = -i(z_A) + z_A$

منه: $z'_o = i(1+i\sqrt{3}) + 1 + i\sqrt{3}$

وعليه: $z'_o = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$

لدينا: $B' = R_2(A, \frac{\pi}{2})$

$b' - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A)$

$b' = i(1-i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}) + 1 - i\sqrt{3}$

وعليه: $b' = (2\sqrt{3}+1) + i\sqrt{3}$

ب- I منتصف $[oB]$ إذن: كفاكة:

$z_I = \frac{z_o + z_B}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

لدينا: $\frac{z_A - z_I}{z_{A'} - z_{B'}}$

$= \frac{1+i\sqrt{3}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2\sqrt{3}+i\sqrt{3}-1+\sqrt{3}-i-i\sqrt{3}}$

إذن: $= \frac{i\frac{1}{2}(3\sqrt{3}-i)}{3\sqrt{3}-i} = \frac{1}{2}i \in iR$ منه:

وعليه: $(oB') \perp (AI)$

منه: (AI) ارتفاع للمثلث $AO'B'$

التمرين الثاني : الحسابيات

2- 1) $a^2 + 1 \equiv [p]$

$(\exists k \in \mathbb{R})\ a^2 + 1 = kp$

$pk - a \times a = 1$

وحسب بيزو فإن: $a \wedge p = 1$

و p أولي. حسب فيرما فإن:

$a^p \equiv a(p)$

$p / a(a^{p-1} - 1)$

بما أن $p \wedge a = 1$ فإن:

$p / a^{p-1} - 1$

وعليه $a^{p-1} \equiv 1[p]$

ب) لكل عدد n من $\mathbb{Z}'$ لدينا:

$n \equiv 0(4)$ $n \equiv 1[4]$

$n \equiv 2[4]$ $n \equiv 3[4]$

لدينا $n \equiv 0(4) \Leftrightarrow 4/n$

$n \equiv 2[4] \Leftrightarrow n$ زوجي

بما أن p أولي فإن:

$p \equiv 1[4]$ أو $p \equiv 3(p)$

نفترض أن $p \equiv 3[4]$

إذن: $p = 4k+3$

حسب ماسبق $a^{p-1} \equiv 1(p)$

(1) $a^{4k+2} \equiv 1[p]$

ومنه لدينا: $a^2 \equiv -1[p]$

(2) $(a^2)^{2k+1} \equiv -1[p]$

لدينا (1) و (2) منه: $1 \equiv -1(p)$

وهذا غير صحيح لأن $p \geq 3$

وبالتالي فإن: $p \equiv 1[4]$

ج- لدينا: $3 \neq 1[4]$ أي $3 \notin A$

$(\forall p_k \in A)\ 3 \wedge (p_k) = 1 \Leftarrow$

$3 \wedge \left(\prod_{p_k \in A} p_k\right) = 1$

ولدينا: $3 \wedge 2 = 1$

$3 \wedge \left(2\prod_{p_k \in A} p_k\right) = 1 \Leftarrow$

وعليه حسب فيرما فإن:

$\left(2\prod_{p_k \in A} p_k\right)^{3-1} \equiv 1[3]$

$\left(2\left(\prod_{p_k \in A} p_k\right)^2 \equiv 1[3]\right.$

ومنه $n \equiv 2[3]$

$\Leftarrow 3$ لا يقسم n.

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

ب- ليكن p أولي و p/n

لدينا $p \neq 3$ لأن 3 لا يقسم n

$n \equiv 0[p]$

$a^2+1 \equiv 0(p)$

$\left(a = 2\prod_{p \in \mathbb{P}} p_\alpha\right)$

وحسب نتيجة السؤال (1) فإن:

$p \equiv 1(4)$

ج/ نفترض أن المجموعة A منتهية

ونضع: $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$

ونعتبر العدد $n = \left(2\prod_{p \in \mathbb{P}} p_i\right)^2 + 1$

لدينا: $n \neq p_1, p_2, \ldots, p_n$

نتحقق أن: "p_k لا يقسم n"

$\forall k \in \{1, \ldots, m\}$

نفترض أن: p_k / n

ولدينا: $p_k / 2\prod_{i=1}^{m} p_i$

$p_k / n \Rightarrow p / \left(2\prod_{i=1}^{m} p_i\right)^2$

وعليه $p_k / 1$ وهذا ممكن.

$\Leftarrow$ p_k لا يقسم n.

نفترض أن n غير أولي

$\Leftarrow$ n يقبل قاسم أولي p.

وحسب ماسبق فإن $p \equiv 1(4)$

إذن $p \in A$ تناقض

$\Leftarrow$ n أولي و $n = 4\left(\prod_{i=1}^{m} p_i\right) + 1$

أي $n \in A$ يتناقض مع

A منتهية.

إذن: المجموعة A غير منتهية.

التمرين 3 : دراسة دالة.

1) $\forall x \in]0,+\infty[\quad f_n(x) = x - n\ln x$

آ- $\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim_{x \to 0^+} x - n\ln x$

لدينا: $\lim_{x \to 0^+} x = 0$ ، $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

إذن:

$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x \to +\infty} x - n\ln x$

$= \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - n\frac{\ln x}{x}\right)$

لكن: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

فإن: $\lim_{x \to +\infty} 1 - n\frac{\ln x}{x} = 1$

وعليه: $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

ب- $f_n'(x) = (x - n\ln x)'$

$= 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$

إذن إشارة $f_n'(x)$ هي إشارة $x - n$

x	0		n		$+\infty$
f_n	$+\infty$	↘	$n(1-\ln n)$	↗	$+\infty$

2) لتكن: $g = f_n|_{]0,n]}$ قصور f_n على $]0,n]$

$]0,n]$ متصلة ومتناقصة قطعا على $]0,n]$

و g تقابل من $]0,n]$ نحو $[n(1-\ln n), +\infty[$

لكن: $n \geq 3 > e$ فإن: $\ln n > 1$

أي أن: $n(1-\ln n) < 0$

$0 \in]n(1-\ln n), +\infty[$

وعليه: $(\exists! \alpha \in]0,n[) \quad g(\alpha) = 0$

$(\exists! \alpha \in]0,n[) \quad f_n(\alpha) = 0$

ولتكن R قصور f_n على $]n,+\infty[$

$]n,+\infty[$ على f_n متصلة ورتابية قطعا على R

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

h تقابل من $]\ln(1-\ln n), +\infty[$ نحو $]n, +\infty[$

وبما أن: $0 \in]\ln(1-\ln n), +\infty[$

فإن: $(\exists! V_n \in]n, +\infty[)\ h(V_n) = 0$

$(\exists! V_n \in]n, +\infty[)\ f_n(V_n) = 0$

3) أ- لدينا U هو حل للمعادلة $f(x) = 0$

على المجال $]0, n[$ و e ينتمي إلى $]0, n[$.

مع: $f_n(1) = 1 > 0$

$f_n(e) = e - n < 0 \quad (n \geq 3 > e)$

منه

$f(e) < 0 < f(1)$

أي $f_n(e) < f_n(U_n) < f_n(1)$

و f_n تناقصية على $]0, n[$

إذن: $(\forall n \geq 3) \quad 1 < U_n < e$

ب- لدينا: $f_n(U_{n+1}) = U_{n+1} - n\ln(U_{n+1})$

$= U_{n+1} - (n+1)\ln U_{n+1} + \ln(U_{n+1})$

$= f_{n+1}(U_{n+1}) + \ln(U_{n+1})$

$(f_{n+1}(U_{n+1}) = 0$ لأن $)$

منه: $f_n(U_{n+1}) = \ln U_{n+1}$

⇐ استنتاج:

لدينا $U_{n+1} > 1 \Leftrightarrow \ln(U_{n+1}) > 0$

أي $f_n(U_{n+1}) > 0 = f_n(U_n)$

U_n و U_{n+1} ينتميان إلى $]1, e[$

وبما أن f_n تناقصية على

$]1, e[\subset]0, n[$

فإن: $U_{n+1} < U_n$

$\Leftarrow (U_n)_{n \geq 3}$ تناقصية.

ج- $U_n = n\ln U_n \Leftarrow f_n(U_n) = 0$

بما أن: $1 < U_n < e < 3$

فإن: $1 \ln n < \ln U_n < 3$

أي $\frac{1}{n} < \ln(U_n) < \frac{3}{n}$

منه $e^{\frac{1}{n}} < U_n < e^{\frac{3}{n}} \quad (\forall n \geq 3)$

4) لدينا: $(\forall n \geq 3) \quad V_n > n$

بما أن $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$

فإن: $\lim_{n \to +\infty} V_n = +\infty$

5) أ- لدينا: $f_n(V_n) = 0$

$\Leftrightarrow V_n = n\ln V_n$

بما أن: $V_n > n \Leftarrow \ln V_n > \ln n$

فإن: $n\ln(V_n) > n\ln n$

إذن: $(\forall n \geq 3) \quad V_n > n\ln n$

هنا انجاز التعليمة: بناء الحد

+/5

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

ب- لدينا:

$$f_n(n^2) = n^2 - n\ln(n^2)$$
$$= n^2 - 2n\ln n$$
$$= n(n - 2\ln n)$$
$$f_n(n^2) = n f_2(n) \quad (\forall n \geq 3)$$

← الاستنتاج:

$f_2'(x) = \frac{x-2}{x}$ ∈ $f_2(x) = x - 2\ln x$

f_2 تزايدية على $[2, +\infty[$

نعلم أن: $f_2(n) \geq f_2(4)$ فإن $n \geq 3$

وهذا $f_2(n^2) > 0 = f_n(V_n)$

ولدينا n^2 و V_n في $]n, +\infty[$

و f_n تناقصية على $]n, +\infty[$

إذن: $(\forall n \geq 3) \quad n^2 > V_n$

ج- لدينا $f_n(V_n) = 0$ تعني $V_n = n\ln(V_n)$

وبما أن $n^2 > V_n$ فإن: $2\ln(n) > \ln(V_n)$

أي أن: $2n\ln n \geq n\ln V_n$

وهذا $(\forall n \geq 3) \quad V_n \leq 2n\ln n$

د- لدينا:

$$\frac{V_n}{n\ln n} = \frac{n\ln V_n}{n\ln n} = \frac{\ln V_n}{\ln n}$$

(إذن: $V_n = n\ln(V_n)$)

لدينا: $n\ln(n) < V_n < 2n\ln n$

$$\ln n + \ln(\ln n) < \ln V_n < \ln(n) + \ln(2\ln(n))$$
$$1 + \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} < \frac{\ln V_n}{\ln n} < 1 + \frac{\ln(2\ln n)}{\ln n}$$
$$1 + \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} < \frac{V_n}{n\ln n} < 1 + \frac{2\ln(2\ln n)}{2\ln n}$$

نعلم أن: $\lim_{+\infty} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} = \lim_{+\infty} \frac{\ln(2\ln n)}{2\ln n} = 0$

فإن: $\lim_{+\infty} \frac{V_n}{n\ln n} = 1$

من إنجاز التلميذة: سناء العلمي
ج.ع.ر.

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma