تصحيح الفرض المحروس رقم 2

الأسدس II

التمرين I :

$(E) : m^2Z^2 + m^3Z + 1 - im^2 = 0$

① أ- من أجل $m=-1$

$(E) : z^2 - z + 1 - i = 0$

$\Delta = 1 - 4(1-i) = -3+4i$

$\Delta = (2i+1)^2$

ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E)

$z_1 = \dfrac{1-(2i+1)}{2} = -i$

$z_2 = \dfrac{1+(2i+1)}{2} = 1+i$

ومنه :

$\boxed{S = \{-i, 1+i\}}$

ب- لنحدد قيم m التي يكون من أجلها $u = 1+i$ حلا للمعادلة (E)

$\left(u = 1+i \text{ حل المعادلة } (E)\right) \Leftrightarrow (E') : (1+i)m^3 + im^2 + 1 = 0$

لدينا : $m=-1$ حل المعادلة (E')

ومنه :

$(E') \Leftrightarrow (m+1)\left((1+i)m^2 - m + 1\right) = 0$

لنحل المعادلة :

$(1+i)m^2 - m + 1 = 0$

$\Delta = -3-4i = (2i-1)^2$

ومنه :

$m = \dfrac{1-(2i-1)}{2(1+i)} = -i$

$m = \dfrac{1+(2i-1)}{2(1+i)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

وعليه قيم m التي من أجلها $u = 1+i$ حل المعادلة (E) هي :

$\boxed{m \in \left\{-1, -i, \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right\}}$

في حالة $m=-1$ (u' و u حلا المعادلة (E))

$\boxed{u = 1+i}$ و $\boxed{u' = -i}$

في حالة $m=-i$

$(E) \Leftrightarrow -z^2 + iz + 1 + i = 0$

$u_2 = -i - u_1 = -1$

ومنه :

$\boxed{u = 1+i}$ و $\boxed{u' = -1}$

في حالة $m = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$(E) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}iz^2 + \dfrac{1}{4}(1+i)z + \dfrac{3}{2} = 0$

$u' = \dfrac{i}{4} + \dfrac{1}{4} - 1 - i = -\dfrac{3}{4}(i+1)$

وعليه :

$\boxed{u = 1+i}$ و $\boxed{u' = -\dfrac{3}{4}(i+1)}$

② أ- لنتحقق أن مميز المعادلة (E) يكتب على الشكل :

$\Delta = m^2(m^2+2i)^2$

$\Delta = m^6 - 4(1-im^2)m^2$

$\Delta = m^2(m^4 - 4 + 4im^2)$

ومنه :

$\boxed{\Delta = m^2(m^2+2i)^2}$

ب- ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E)

$z_1 = \dfrac{-m^3 - m(m^2+2i)}{2m^2} = -m - \dfrac{i}{m}$

$z_2 = \dfrac{-m^3 + m(m^2+2i)}{2m^2} = \dfrac{i}{m}$

③ أ-

$Z = \dfrac{m-a}{m-b} = \dfrac{m + m + \frac{i}{m}}{m - \frac{i}{m}} = \dfrac{2m^2+i}{m^2-i}$

$= \dfrac{2(m^2-i)+3i}{m^2-i} = 2 + \dfrac{3i}{m^2-i}$

$Z = \bar{Z} \Leftrightarrow 2 + \dfrac{3i}{m^2-i} = 2 - \dfrac{3i}{\bar{m}^2+i}$

$\Leftrightarrow \bar{m}^2 = -m^2$

$\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(m^2) = 0$

ومنه : $m^2 \in i\mathbb{R}$

إذن :

$\arg(m^2) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ أو $\arg(m^2) = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

$2\arg(m) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ أو $2\arg(m) = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

وعليه :

$\arg(m) = \dfrac{\pi}{4}[\pi]$ أو $\arg(m) = -\dfrac{\pi}{4}[\pi]$

ب-

$\left(A \text{ و } B \text{ و } M \text{ نقط مستقيمية}\right) \Leftrightarrow \dfrac{m-a}{m-b} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow Z = \bar{Z}$

$\Leftrightarrow \arg(m) \equiv \dfrac{\pi}{4}[\pi]$ أو $\arg(m) \equiv -\dfrac{\pi}{4}[\pi]$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(m) = \mathrm{Im}(m)$ أو $\mathrm{Re}(m) = -\mathrm{Im}(m)$

نضع $m = x + yi$ (r) $(x, y \in \mathbb{R})$

ومنه، مجموعة النقط $M(m)$ التي تكون من أجلها A و B و M نقط مستقيمية هي اتحاد المستقيمين:

(D_1) : $y = x$.

(D_2) $y = -x$.

4) أ-

لدينا R دوران مركزه $B\left(\frac{i}{m}\right)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$A' = R(A) \Leftrightarrow a' = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(a - \frac{i}{m}\right) + \frac{i}{m}$$

$$\Leftrightarrow a' = ai + \frac{1}{m} + \frac{i}{m}$$

$$\Leftrightarrow a' = -im + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{i}{m}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a' = -im + \frac{i}{m} + \frac{2}{m}}$$

$$B' = R^{-1}(M) \Leftrightarrow R(B') = M$$

$$\Leftrightarrow e^{i\frac{\pi}{2}}\left(b' - \frac{i}{m}\right) + \frac{i}{m} = m$$

$$\Leftrightarrow b' - \frac{i}{m} = -im - \frac{1}{m}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{b' = -im + \frac{i-1}{m}}$$

ب-

$$M' = R(M) \Leftrightarrow m' - \frac{i}{m} = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(m - \frac{i}{m}\right)$$

$$\Leftrightarrow m' = mi + \frac{i+1}{m}$$

لدينا:

$$\frac{b' + m'}{2} = \frac{-mi + \frac{i-1}{m} + mi + \frac{i+1}{m}}{2}$$

$$= \frac{2i}{2m} = \frac{i}{m}$$

$$= b$$

وعليه: $B(b)$ هي منتصف القطعة $[B'M']$

ج- ليكن I منتصف القطعة $[AM]$ و Z_I لحقها

$$Z_I = \frac{m + a}{2} = \frac{-i}{2m}$$

$$\frac{b' - a'}{b - z_I} = \frac{-im + \frac{i-1}{m} + im - \frac{i}{m} - \frac{2}{m}}{\frac{i}{m} + \frac{i}{2m}}$$

$$= \frac{-3}{m} \times \frac{2m}{3i}$$

$$= 2i$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{A'B'}}\right) \equiv \arg\left(\frac{b' - a'}{b - z_I}\right) [2\pi]$$

$$\equiv \arg(2i) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

(2) $(IB) \perp (A'B')$

ولدينا:

$$\left|\frac{b' - a'}{b - z_I}\right| = |2i| = 2$$

ومنه،

$$|b' - a'| = 2|b - z_I|$$

أي:

$$\boxed{A'B' = 2BI}$$

التمرين II :

1) إذا كان n زوجي

$$(\exists h \in \mathbb{Z}) / n = 2h \Rightarrow n^4 = 16h^4$$

إذن:

(1) $\quad n^4 \equiv 0 [16]$

إذا كان n فردي

$$(\exists h' \in \mathbb{Z}) / n = 2h' + 1 \Rightarrow n^4 = (2h+1)^2 (2h+1)^2$$

$$\Rightarrow n^4 = (4h^2 + 1 + 4h)^2$$

$$\Rightarrow n^4 = 16h^4 + 8h^2(1 + 4h) + (1 + 4h)^2$$

$$\Rightarrow n^4 = 16h^4 + 8h^2 + 32h^3 + 1 + 16h^2 + 8h$$

$$\Rightarrow n^4 = 16(h^4 + h^2 + 2h^3) + 8h(h+1) + 1$$

لدينا:

$$\begin{cases} 16(h^4 + h^2 + 2h^3) \equiv 0 [16] \\ 8h(h+1) \equiv 0 [16] \end{cases}$$

(جداء عددين متتابعين هو عدد زوجي $h(h+1) = 2q \; (\exists q \in \mathbb{Z})$)

إذن:

(2) $\quad n^4 \equiv 1 [16]$

من (1) و (2) نستنتج أن:

$n^4 \equiv 0 [16]$ أو $n^4 \equiv 1 [16]$

2)

$N = a^4 + b^4$ $\qquad a \wedge b = 1$

الحالة (1):

$$\begin{cases} a^4 \equiv 0 [16] \\ b^4 \equiv 1 [16] \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} a^4 \equiv 1 [16] \\ b^4 \equiv 0 [16] \end{cases}$$

وعليه:

$$a^4 + b^4 \equiv 1 [16]$$

أي:

$$N \equiv 1 [16]$$

الحالة (2):

$$\begin{cases} a^4 \equiv 1 [16] \\ b^4 \equiv 1 [16] \end{cases}$$

وعليه:

$$a^4 + b^4 \equiv 2 [16]$$

أي:

$$N \equiv 2 [16]$$

نستنتج أن:

$N \equiv 1 [16]$ أو $N \equiv 2 [16]$

ج- ليكن p عدد أولي ومنه : حسب مبرهنة فيرما :

$x^p \equiv x [p] \Rightarrow x(x^{p-1}-1) \equiv 0 [p]$

- نفترض أن $x \equiv 0 [p]$

$x \equiv 0 [p] \Rightarrow x^4 \equiv 0 [p]$

ولدينا : $x^4 \equiv -1 [p]$ غير صحيح

إذن : p لا يقسم x .

وعليه :

$x^{p-1} \equiv 1 [p]$

$\exists! (q,r) \in \mathbb{Z}^2 / p = 8q + r$

$x^4 \equiv -1 [p] \Rightarrow x^8 \equiv 1 [p]$

$\Rightarrow x^{8q+r-1} \equiv x^{r-1} [p]$

$\Rightarrow x^{p-1} \equiv x^{r-1} [p]$

وبالتالي :

$x^{r-1} \equiv 1 [p]$

. نبين أن $r = 1$

$0 \leq r < 7$ (باقي القسمة الأقليدية للعدد p على 8)

$r = 0 \Leftarrow$ $p = 8q$ و p أولي إذن $r \neq 0$

$r \notin \{2,4,6\}$ لأن p عدد أولي أي p فردي وعليه r فردي

$r = 3 \Leftarrow$ $x^2 \equiv 1 [p] \Rightarrow x^4 \equiv 1 [p]$

ولدينا : $x^4 \equiv -1 [p]$

ومنه ، $r \neq 3$

$r = 5 \Leftarrow$ $x^4 \equiv 1 [p]$ و $x^4 \equiv -1 [p]$

إذن ، $r \neq 5$.

$r = 7 \Leftarrow$

$x^6 \equiv 1 [p]$ و $x^4 \equiv -1 [p]$

$x^6 \equiv 1 [p]$ و $x^6 \equiv -x^2 [p]$

$x^2 \equiv -1 [p] \Rightarrow x^4 \equiv 1 [p]$ و $x^4 \equiv -1 [p]$

وعليه $r \neq 7$.

$r = 1 \Leftarrow$ $1 \equiv 1 [p]$

إذن :

$\boxed{r = 1}$

③ أ- نضع : $D = p \wedge a$

(لأن p/N)

$\begin{cases} D/p \\ D/a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D/N \\ D/a^4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} D/a^4+b^4 \\ D/a^4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} D/b^4 \\ D/a^4 \end{cases}$

$\Rightarrow D / a^4 \wedge b^4$

و $a^4 \wedge b^4 = 1$

وعليه : $D/1$

إذن $D = 1$

وعليه .

$\boxed{p \wedge a = 1}$

نضع $d = p \wedge b$

(لأن p/N)

$\begin{cases} d/p \\ d/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/N \\ d/a^4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} d/a^4+b^4 \\ d/b^4 \end{cases}$

$\Rightarrow d / a^4 \wedge b^4$ و $a^4 \wedge b^4 = 1$

$\Rightarrow d/1$

أي $d = 1$

وعليه :

$\boxed{p \wedge b = 1}$

ب- لدينا ، $p \wedge a = 1$ حسب خاصية Bézout

$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 / \alpha a + \beta p = 1$

أي : $(-\alpha) a - \beta p = -1$

نضع ، $-\alpha = c$

ومنه ،

$(\exists c \in \mathbb{Z})$ $ca \equiv -1 [p]$

لدينا ، $p/N \Rightarrow N \equiv 0 [p]$

$\Rightarrow a^4 \equiv -b^4 [p]$

ولدينا ، $ac \equiv -1 [p] \Rightarrow (ac)^4 \equiv 1 [p]$

و : $(ac)^4 \equiv -(bc)^4 [p]$

وعليه ، $-(bc)^4 \equiv 1 [p]$

ومنه ، $(bc)^4 \equiv -1 [p]$

نضع : $bc = x$ وعليه ،

$(\exists x \in \mathbb{Z})$ $x^4 \equiv -1 [p]$

التمرين III

$f_n(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+1}$

1- أ- لنبين أن $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^3 = 0$

نضع $X = x^{1/3}$ وعليه $x = X^3$

$$\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^3 = \lim_{X\to 0^+} X^3(\ln(X^3))^3$$
$$= \lim_{X\to 0^+} (3X\ln(X))^3$$

لدينا $\lim_{X\to 0^+} X\ln(X) = 0$

وعليه: $\boxed{\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^3 = 0}$

$$\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - (\ln x)^3\right)$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(1 - x(\ln x)^3\right)$$

لدينا: $\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^3 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} 1 - x(\ln x)^3 = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{cases}$

وعليه: $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = +\infty}$

ب- $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - (\ln x)^3$

$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^3 = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - (\ln x)^3 = -\infty$

وعليه: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = -\infty}$

② لنبين أن: $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = 0$

نضع $X = x^{1/3}$ ومنه $x = X^3$

ومنه:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{(\ln(X^3))^3}{X^3}$$
$$= \lim_{X\to+\infty} \left(3\frac{\ln(X)}{X}\right)^3$$

لدينا: $\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0 \Rightarrow \lim_{X\to+\infty} \left(\frac{3\ln(X)}{X}\right)^3 = 0$

ومنه: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = 0}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^3}{x}$$

$\Big\{ \lim \quad (\ln x)^3$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = 0$

إذن: (C_1) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأفاصيل

③ f_1 قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

$$f_1'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{3(\ln x)^2}{x}$$
$$= -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3(\ln x)^2}{x}\right) < 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^{+*})$$

ومنه f_1 تناقصية قطعا على $\mathbb{R}^+$

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

④ f_1 متصلة وتناقصية قطعا على $\mathbb{R}^{+*}$

ومنه f_1 تقابل من $\mathbb{R}^{+*}$ نحو $\mathbb{R}$.

و $0 \in \mathbb{R}$ إذن المعادلة $f_1(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β_1 على $\mathbb{R}^{+*}$.

ولدينا:

$f_1(2) = \frac{1}{2} - (\ln(2))^2 > 0$

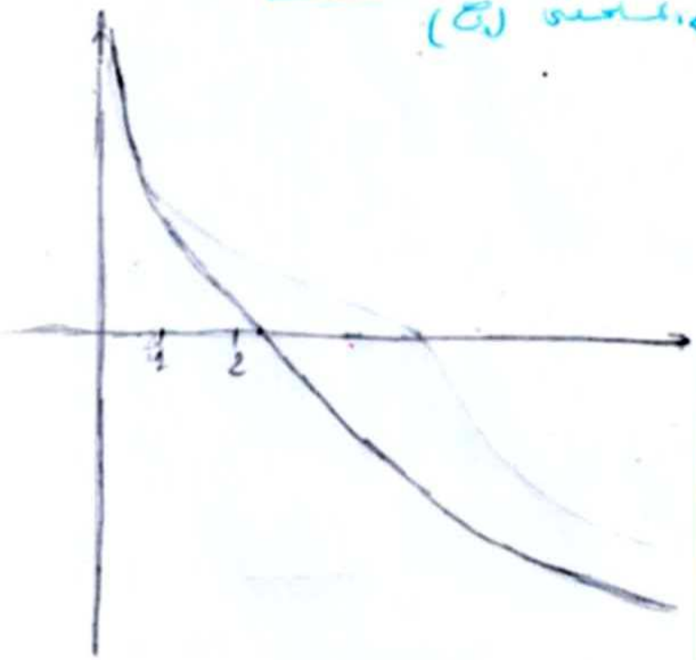
$f_1(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$

ومنه: f_1 تناقصية على $\mathbb{R}^{+*}$

$$f_1(e) < f_1(\beta_1) < f_1(2)$$

وعليه: $\boxed{2 < \beta_1 < e}$

المنحنى (C_1)



II - 1)

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+1}\right)$$

لدينا :

$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{2n+1} = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\end{cases}$$

وعليه :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty}$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+1} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}\left(1 - x(\ln x)^{2n+1}\right)$$

نضع : $x = X^{2n+1}$ ومنه $X = x^{\frac{1}{2n+1}}$

$$\lim_{x\to0^+} f_n(x) = \lim_{X\to0^+} \frac{1}{X^{2n+1}}\left(1 - \left(X\ln(X^{2n+1})\right)^{2n+1}\right)$$

$$= \lim_{X\to0^+} \frac{1}{X^{2n+1}}\left(1 - \left((2n+1) X \ln(X)\right)^{2n+1}\right)$$

لدينا :

$$\begin{cases}\lim_{X\to0^+} X\ln(X) = 0 \\ \lim_{X\to0^+} \frac{1}{X^{2n+1}} = +\infty\end{cases}$$

ومنه :

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} f_n(x) = +\infty}$$

2)

$$f_n'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{(2n+1)(\ln x)^{2n}}{x}$$

$$= -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{(2n+1)(\ln x)^{2n}}{x}\right) < 0$$

إذن f_n تناقصية قطعا و f_n متصلة على $\mathbb{R}^{*+}$

إذن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β_n.

ولدينا :

$f_n(1) = 1 > 0$

$f_n(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$

f_n تناقصية

وعليه :

$$\boxed{1 < \beta_n < e}$$

3)

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+3} - \frac{1}{x} + (\ln x)^{2n+1}$$

$$= (\ln(x))^{2n+1}\left(1 - (\ln x)^2\right)$$

$\forall x \in [1, e]$ $\quad 0 < \ln(x) < 1$

$-(\ln(x))^2 > -1$

$1 - (\ln x)^2 > 0$ و $(\ln x)^{2n+1} > 0$

ومنه :

$$\boxed{f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0}$$

ب- لدينا : $\forall x \in [1, e]$

$f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

ومنه $\beta_n \in [1, e]$

$f_{n+1}(\beta_n) > f_n(\beta_n)$ و $f_n(\beta_n) = 0$

ومنه $f_{n+1}(\beta_n) > 0$ و $f_{n+1}(\beta_{n+1}) = 0$

وعليه :

$$f_{n+1}(\beta_n) > f_{n+1}(\beta_{n+1})$$

f_{n+1} تناقصية على $[1, e]$ و $(\beta_n, \beta_{n+1}) \in [1, e]^2$

وعليه $\beta_n < \beta_{n+1}$

إذن $(\beta_n)_{n\geq1}$ تزايدية قطعا

4- أ-

لدينا :

$$f_n(\beta_n) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\beta_n} = (\ln(\beta_n))^{2n+1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\beta_n}\right)^{\frac{1}{2n+1}} = \ln(\beta_n)$$

$$\Rightarrow \ln(\ln(\beta_n)) = \frac{1}{2n+1}\ln\left(\frac{1}{\beta_n}\right)$$

لدينا :

$$\beta_n < e \Rightarrow \frac{1}{\beta_n} > \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{\beta_n}\right) > \ln(e^{-1})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n+1}\ln\left(\frac{1}{\beta_n}\right) > \frac{-1}{2n+1} \quad \left(\frac{1}{2n+1} > 0\right)$$

$$\Rightarrow \ln(\ln(\beta_n)) > \frac{-1}{2n+1}$$

ولدينا :

$$\frac{-1}{2n+1} > \frac{-1}{2n}$$

وعليه :

$$\boxed{\ln(\ln(\beta_n)) > \frac{-1}{2n}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

ب- لدينا :

$$\ln(\ln(\beta_n)) > \frac{-1}{2n} \Rightarrow \ln(\beta_n) > e^{-\frac{1}{2n}}$$

ولدينا :

$$\beta_n < e \Rightarrow \ln(\beta_n) < 1$$

وعليه :

$$e^{\frac{-1}{2n}} < \ln(\beta_n) < 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{2n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{2n}} = e^0 = 1$$

([illegible])

ومنه :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(\beta_n) = 1$$

أي

$$\lim_{n\to+\infty} \beta_n = e$$