هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

تصحيح الفرض المحروس رقم ① — الأحد الثاني

الجزء (1)

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

$f_n(0)=0$ و $f_n(x)=x\,e^{-\frac{1}{nx}}$ $x\neq 0$

① أ- لنبين أن f_n متصلة على اليمين في $x_0=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x\,e^{-\frac{1}{nx}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{nx}=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{nx}}=0$

و $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$

و عليه: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,e^{-\frac{1}{nx}}=0=f_n(0)$

إذن f_n متصلة في 0 على اليمين.

ب- لندرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في 0.

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$

$\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=e^{-\frac{1}{nx}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{nx}=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{nx}}=0$

و عليه: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=0$

إذن f_n قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و $f'_{nd}(0)=0$

② - أ-

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-\frac{1}{nx}}$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{nx}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{nx}}=e^0=1$

($x\mapsto e^x$ متصلة في 0)

و $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

و عليه: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$

ب- لنحسب $f'_n(x)$

ليكن $x\in]0;+\infty[$

لدينا: $f'_n(x)=e^{-\frac{1}{nx}}+x\left(\frac{1}{nx^2}\right)e^{-\frac{1}{nx}}$

و منه: $f'_n(x)=\left(1+\frac{1}{nx}\right)e^{-\frac{1}{nx}}$

← لدينا: $(\forall x\in]0;+\infty[)$ $f'_n(x)>0$

و عليه: f_n تزايدية قطعا على $[0;+\infty[$

← جدول تغيرات الدالة f_n.

x	0	$+\infty$
$f_n(x)$	0	$+\infty$

③ $t\in[0;+\infty[$ $\quad g(t)=e^{-t}-(1-t)$

أ- لندرس تغيرات الدالة g

$g'(t)=1-e^{-t}$ لكل $t\in[0;+\infty[$

$-t\leqslant 0 \Rightarrow e^{-t}\leqslant 1$

$\Rightarrow 1-e^{-t}\geqslant 0$

$\Rightarrow g'(t)\geqslant 0$

ومنه: g تزايدية قطعا على $[0;+\infty[$

t	0	$+\infty$
$g(t)$	0	$+\infty$

لدينا: $(\forall t\in[0;+\infty[)$ $g(t)\geqslant g(0)=0$

ومنه: $e^{-t}-1+t\geqslant 0$

أي: $1-e^{-t}\leqslant t$

ولدينا: $g'(t)\geqslant 0 \Leftrightarrow 1-e^{-t}\geqslant 0$

وعليه: $\forall t\in[0;+\infty[$ $\quad 0\leqslant 1-e^{-t}\leqslant t$

ب- لنبين أن: $(\forall x\geqslant 0)$ $0\leqslant e^{-x}-(1-x)\leqslant \frac{x^2}{2}$

لدينا حسب السؤال السابق: $(\forall t\geqslant 0)$ $0\leqslant 1-e^{-t}\leqslant t$

وعليه: $0\leqslant \int_0^x (1-e^{-t})\,dt\leqslant \int_0^x t\,dt$

أي: $0\leqslant [t+e^{-t}]_0^x\leqslant \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$

ومنه: $0\leqslant x+e^{-x}-1\leqslant \frac{x^2}{2}$

إذن: $(\forall x\geqslant 0)$ $0\leqslant e^{-x}-(1-x)\leqslant \frac{x^2}{2}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

④- أ- لنبين أن :
$(\forall x>0)$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $0\leqslant f_n(x)-\left(x-\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{2n^2x}$

لدينا حسب السؤال السابق:

$(\forall x>0)$ $0\leqslant e^{-x}-(1-x)\leqslant\frac{x^2}{2}$ (1)

$(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $(\forall x>0)$ $\frac{1}{nx}\in\mathbb{R}_+^*$

لنعوض ب $\frac{1}{nx}$ في العلاقة (1) نجد:

$$0\leqslant e^{-\frac{1}{nx}}-\left(1-\frac{1}{nx}\right)\leqslant\frac{1}{2n^2x^2}$$

بما أن $x>0$ فإن:

$$0\leqslant xe^{-\frac{1}{nx}}-\left(x-\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{2n^2x}$$

ومنه:

$(\forall x>0)$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $0\leqslant f_n(x)-\left(x-\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{2n^2x}$

ب- لندرس الفرع اللانهائي لـ (C_n) عند $+\infty$

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2n^2x}=0$$

ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty}f_n(x)-\left(x-\frac{1}{n}\right)=0$$

إذن المستقيم $(\Delta_n): y=x-\frac{1}{n}$ مقارب مائل لـ (C_n) بجوار $+\infty$

ج- لندرس الوضع النسبي لـ (C_n) و المقارب المائل.

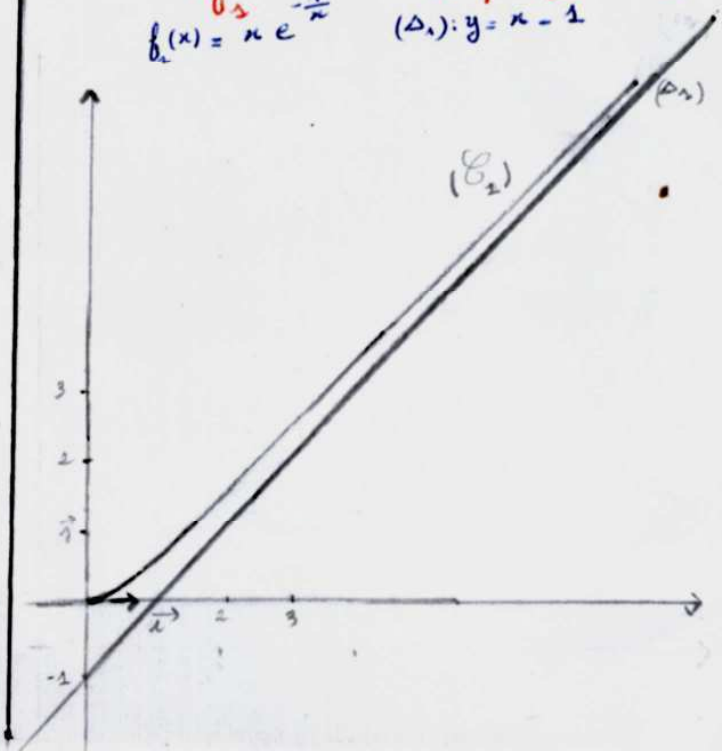
بما أن:

$(\forall x>0)$ $f_n(x)-\left(x-\frac{1}{n}\right)>0$

فإن: (C_n) يوجد فوق (Δ_n) $(\forall x\in[0;+\infty[)$

⑤- لنرسم (C_1) للدالة f_1.

$f_1(x)=xe^{-\frac{1}{x}}$ $(\Delta_1): y=x-1$



⑥- لنبين أن المنحنى (C_n) هو صورة (C_1) بالتحاكي $H\left(0,\frac{1}{n}\right)$.

نعتبر $M(x,y)$ نقطة من (C_1) و $M'(x',y')$ صورتها بالتحاكي $H\left(0,\frac{1}{n}\right)$

لنبين أن $M'(x',y')$ تنتمي للمنحنى (C_n)

$$\begin{pmatrix}M'\text{ صورة }M\\ \text{بالتحاكي}\\ H\left(0,\frac{1}{n}\right)\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM'}=\frac{1}{n}\overrightarrow{OM}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x'=\frac{1}{n}x\\ y'=\frac{1}{n}y\end{cases}$$

لدينا $M(x,y)\in(C_1)$ وعليه:

$$\begin{cases}y=xe^{-\frac{1}{x}}\\ x=nx'\end{cases}\Rightarrow y=nx'e^{-\frac{1}{nx'}}$$

ومنه $y'=\frac{1}{n}y\Rightarrow y'=\frac{1}{n}\left(nx'e^{-\frac{1}{nx'}}\right)$

أي $y'=x'e^{-\frac{1}{nx'}}$

وعليه: $M'(x',y')\in(C_n)$

إذن: (C_n) هو صورة (C_1) بالتحاكي $H\left(0,\frac{1}{n}\right)$

الجزء (2)

$(n\in\mathbb{N}^*)$ $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$

①- لنبين أن: $\forall x\in[0;1]$ $f_n(x)\leqslant x$

$(\forall x\in[0;1])$ $-\frac{1}{nx}\leqslant 0\Rightarrow e^{-\frac{1}{nx}}\leqslant 1$

$\Rightarrow xe^{-\frac{1}{nx}}\leqslant x$

وعليه: $(\forall x\in[0;1])$ $f_n(x)\leqslant x$

②- لنستنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $I_n\leqslant\frac{1}{2}$

لدينا: $\forall x\in[0;1]$ $f_n(x)\leqslant x$

ومنه: $\int_0^1 f_n(x)\,dx\leqslant\int_0^1 x\,dx$

أي: $I_n\leqslant\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$

وعليه: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $I_n\leqslant\frac{1}{2}$

③- لنبين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\leqslant I_n$

لدينا (ص 2.4) $(\forall x>0)$ $f_n(x)\geqslant x-\frac{1}{n}$

ومنه: $\int_0^1 f_n(x)\,dx\geqslant\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x}{n}\right]_0^1$

إذن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $I_n\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$

ص 2

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

← لنحدد $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

لدينا من ④ و ③ :

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2}$$

و

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}-\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

وعليه :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{2}$$

الجزء (3)

① - أ - لنبين أن المعادلة $f_n(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α_n.

f_n متصلة وتزايدية قطعا على $[0;+\infty[$

ومنه : f_n تقابل من $[0;+\infty[$ نحو $[0;+\infty[$

و $1 \in [0;+\infty[$

إذن : $\exists!\ \alpha_n \in [0;+\infty[\ / \ f_n(\alpha_n)=1$

وعليه : المعادلة $f_n(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α_n.

ب - لنبين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \quad \alpha_n > 1$

لدينا :

$$f_n(1) = e^{-\frac{1}{n}}$$

$$-\frac{1}{n} < 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{n}} < 1$$

أي : $f_n(1) < f_n(\alpha_n)$

و f_n تزايدية قطعا على $[0;+\infty[$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \quad \alpha_n > 1$

② - لنتحقق أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \quad \alpha_n \ln \alpha_n = \frac{1}{n}$

$$f_n(\alpha_n)=1 \Leftrightarrow \alpha_n e^{-\frac{1}{n\alpha_n}} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{n\alpha_n}} = \frac{1}{\alpha_n} \qquad (\alpha_n > 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{n\alpha_n} = \ln\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n \ln\left(\frac{1}{\alpha_n}\right) = \frac{-1}{n}$$

ومنه : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \quad \alpha_n \ln(\alpha_n) = \frac{1}{n}$

③ - أ - لندرس تغيرات الدالة $h(x)=x\ln x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

$$h'(x) = \ln x + 1 \qquad (\forall x\in]0;+\infty[)$$

$$h'(x) > 0 \Rightarrow \ln x > -1$$

$$\Rightarrow x > e^{-1} = \frac{1}{e}$$

ومنه :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖ 0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

ب - لنبين أن المتتالية (α_n) تناقصية ونستنتج أنها متقاربة.

لدينا :

$$\alpha_n \ln \alpha_n = h(\alpha_n) = \frac{1}{n}$$

و

$$\alpha_{n+1} \ln(\alpha_{n+1}) = h(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$$

لدينا :

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow h(\alpha_{n+1}) < h(\alpha_n)$$

و h تزايدية قطعا على $]1;+\infty[$

و $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \quad \alpha_n \in]1;+\infty[$

وعليه : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \quad \alpha_{n+1} < \alpha_n$

وبالتالي : (α_n) تناقصية.

← (α_n) تناقصية ومصغورة بالعدد 1 إذن (α_n) متقاربة

④ - نضع : $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

أ - لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N}) \quad \alpha_n > 1$

ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n \geqslant 1$

وعليه : $\alpha \geqslant 1$

← لنبين أن $h(\alpha)=0$

لدينا : α متصلة في $x\mapsto \ln(x)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha$

ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n) = \ln(\alpha)$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n \ln(\alpha_n) = \alpha\ln(\alpha)$

بما أن : $\alpha\ln(\alpha) = h(\alpha)$ و $\alpha_n \ln(\alpha_n) = \frac{1}{n}$

فإن : $h(\alpha)=0$

ب - لنستنتج قيمة النهاية α.

لدينا :

$$h(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha\ln(\alpha)=0 \qquad (\alpha \geqslant 1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(\alpha)=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 1$$

وعليه : $\alpha = 1$

الجزء (4)

$x\in[0;+\infty[$

$F(0)=0$ و $F(x) = \int_x^{2x} f_n(t)\,dt \ ; \ x\neq 0$

① - أ - لنبين أن : $(\forall t>0) \quad 0 < e^{-\frac{1}{t}} < 1$

لدينا

$$(\forall t>0) \quad -\frac{1}{t} < 0 \Rightarrow 0 < e^{-\frac{1}{t}} < 1$$

ب - لنبين أن : F متصلة على يمين $x_0=0$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

① ب - لدينا : $(\forall t>0)$

$0<e^{-\frac{1}{t}}<1 \Rightarrow 0<te^{-\frac{1}{t}}<t \quad (t>0)$

$\Rightarrow 0<f_2(t)<t$

$\Rightarrow 0<\int_x^{2x} f_2(t)<\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^{2x}$

ومنه : $0<F(x)<2x^2-\frac{x^2}{2}$

لدينا : $\lim_{x\to 0+} 2x^2-\frac{x^2}{2}=0=F(0)$

ومنه : F متصلة على اليمين في $x_0=0$

② - لنبين أن : $\lim_{x\to 0+}\frac{F(x)}{x}=0$

لدينا حسب السؤال السابق: $(\forall x>0)$

$0<\frac{F(x)}{x}<2x-\frac{x}{2}$

$\lim_{x\to 0+}\frac{3x}{2}=0$

وعليه : $\lim_{x\to 0+}\frac{F(x)}{x}=0$

← إذن F قابلة للاشتقاق في 0 .

وعليه : (Γ_F) يقبل نصف مماس عند $x_0=0$

معادلته : $(P): y=0$ (محور الأفاصيل).

③ - أ - لنبين أن : $(\forall t\in\mathbb{R})\quad e^t\geq t+1$

نضع : $(t\in\mathbb{R})\quad g(t)=e^t-t-1$

$g'(t)=e^t-1$

$g'(t)\geq 0 \Rightarrow e^t\geq 1$

$\Rightarrow t\geq 0$

ومنه :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(t)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

لدينا : $(\forall t\in\mathbb{R})\quad g(t)\geq g(0)=0$

ومنه : $(\forall t\in\mathbb{R})\quad e^t\geq t+1$

ب - لنبين أن : $(\forall x>0)\quad F(x)\geq -x+\frac{3}{2}x^2$

لدينا : حسب السؤال السابق :

$e^{-\frac{1}{t}}\geq -\frac{1}{t}+1 \quad (t>0)$

ومنه : $te^{-\frac{1}{t}}\geq t-1$

ومنه : $\int_x^{2x} f_2(t)\,dt \geq \int_x^{2x}(t-1)\,dt$

وعليه : $F(x)\geq\left[\frac{t^2}{2}-t\right]_x^{2x}$

ومنه : $(\forall x>0)\quad F(x)\geq -x+\frac{3}{2}x^2$

← لنحسب $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2}x^2-x=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{3}{2}x-1\right)$

$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2}x-1=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}x=+\infty\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$

ج - لندرس الفرع اللانهائي لـ (Γ_F) عند $+\infty$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$

و $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}\Leftarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2}x-1=+\infty$

وعليه : (Γ_F) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب

④ أ - لنبين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ وأن $F'(x)=\left(4e^{\frac{1}{2x}}-1\right)f_2(x)$

لدينا :

$]0;+\infty[$ متصلة على $t\mapsto f_2(t)$

وعليه f_2 تقبل دالة أصلية G على $]0;+\infty[$

أي : $F(x)=G(2x)-G(x)$

لدينا :

$]0;+\infty[$ قابلة للاشتقاق على $x\mapsto 2x$

و $]0;+\infty[$ قابلة للاشتقاق على $x\mapsto G(x)$

و $u(]0;+\infty[)\subset]0;+\infty[$

وعليه :

$F: x\mapsto G(2x)-G(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

$(\forall x\in]0;+\infty[)$

$F'(x)=2G'(2x)-G'(x)$

$=2f_2(2x)-f_2(x)$

$=2\left(2xe^{-\frac{1}{2x}}\right)-f_2(x)$

$=f_2(x)\left(4e^{\frac{1}{2x}}-1\right)$

ومنه : $(\forall x\in]0;+\infty[)\quad F'(x)=\left(4e^{\frac{1}{2x}}-1\right)f_2(x)$

ب - لندرس تغيرات الدالة F ونستخرج جدول تغيراتها.

لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+})\quad F'(x)=\left(4e^{\frac{1}{2x}}-1\right)f_2(x)$

لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+})\quad f_2(x)>0$

$\frac{1}{2x}>0 \Rightarrow e^{\frac{1}{2x}}>1$

$\Rightarrow 4e^{\frac{1}{2x}}>4$

$\Rightarrow 4e^{\frac{1}{2x}}-1>3>0$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

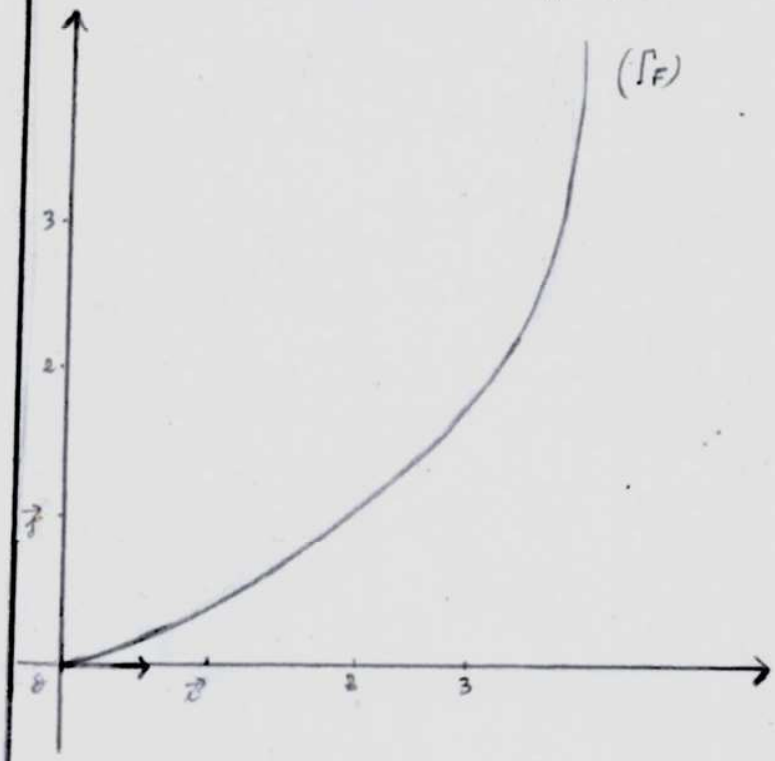
④-ب- وسنه : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ F'(x) > 0$

إذن : F تزايدية قطعا على $[0;+\infty[$

جدول تغيرات F.

x	0	$+\infty$
$F(x)$	0	$+\infty$

⑤- رسم المنحنى (Γ_F)



من انجاز التلميذة : أمينة سامي

تحت اشراف الأستاذ : المانتي بوشعيب

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma