Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

2014-13	فرض رقم 4	2SM

ليكن n عدد من $\mathbb{N}^*$ ونعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(0)=0$ و $f_n(x)=xe^{-\frac{n}{x}}$; $x\neq 0$

الجزء الأول :

1) أ- بين أن f_n متصلة على يمين $x_0=0$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على يمين $x_0=0$

2) أ- أحسب المشتقة $f_n'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$

ب- أدرس تغيرات الدالة f_n و ضع جدول تغيراتها

3) أ- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n)

ب- أرسم المنحنى (C_2)

الجزء الثاني :

1) أ- بين أن المعادلة $f_n(x)=1$ تقبل حلا وحيدا U_n

ب- بين أن $U_n>1$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

2) أ- بين أن $f_n(U_{n+1})=e^{\frac{1}{U_{n+1}}}$

ب- استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

3) أ- بين أن $U_n\ln U_n=n$

ب- بين أن الدالة $g(x)=x\ln x$ تقابل من المجال $[1,+\infty[$ نحو مجال يتم تحديده و استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=+\infty$

4) أ- بين العلاقة $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\ln U_n+\ln(\ln U_n)=\ln n$

ب- استنتج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln U_n}{\ln n}$

5) نعتبر $I_n=\int_{U_n}^{U_{n+1}}f_n(t)\,dt$ لكل n عدد من $\mathbb{N}^*$ ونضع $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}I_k$

أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $1\le\frac{I_n}{U_{n+1}-U_n}\le e^{\frac{1}{U_{n+1}}}$ و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_n}{U_{n+1}-U_n}$

ب- أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

الجزء الثالث :

لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$F(0)=0$ و $F(x)=\int_x^{2x}f_2(t)\,dt$; $x\neq 0$

1) أ- بين أن $(\forall t>0)$ $0<e^{-\frac{2}{t}}<1$

ب- بين أن F متصلة و قابلة للاشتقاق على يمين $x_0=0$

2) أ- بين أن $(\forall t\in\mathbb{R})$ $e^t\ge t+1$

ب- بين أن $(\forall x>0)$ $F(x)\ge -2x+\frac{3}{2}x^2$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

ج- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (Γ_F) عند $+\infty$

3) أ- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

و بين أن $F'(x)=\left(4e^{\frac{1}{x}}-1\right)f_2(x)$

ب- أدرس تغيرات الدالة F و أنجز جدول التغيرات

4) أرسم المنحنى (Γ_F)

5) أ- بين أن $(\forall x>0)$ $x^2e^{-\frac{2}{x}}\le F(x)\le 2x^2e^{-\frac{1}{x}}$

ب- بين أن $(\forall x\in\mathbb{R})$ $e^x>ex$ و استنتج أن $F\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right)<\sqrt{\frac{e}{2}}$

6) أ- بين أن $(\forall x\ge U_2)$ $F(x)\ge x$

ب- استنتج أن $\left(\exists\alpha\in\left[\sqrt{\frac{e}{2}},U_2\right]\right)$ $\alpha=\int_\alpha^{2\alpha}f_2(t)\,dt$

حظ سعيد

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع