الثانية علوم رياضية	فرض 1 دورة 2	2015-14

التمرين الأول

الجزء (1) ليكن n عدد طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية g_n المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي : $g_n(x)=n\ln x-\frac{1}{x}$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g_n(x)$

2) اعط جدول تغيرات الدالة g_n

أ- بين أن المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n و استنتج إشارة $g_n(x)$

ب- بين أن $1<\alpha_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ و استنتج أن $\alpha_n<e^{\frac{1}{n}}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ج- استنتج أن $(\alpha_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها و بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\alpha_n-1)=1$

الجزء (2) لكل عدد طبيعي غير منعدم n ،

نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}^{+}-\{1\}$ بما يلي : $x>0$; $f_n(x)=\frac{e^{nx}}{\ln x}$ و $f_n(0)=0$

1) أحسب النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f_n(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f_n(x)$

2) بين أن الدالة f_n متصلة على يمين النقطة $a=0$

3) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على يمين النقطة $a=0$

أ- بين أن $f_n'(x)=\frac{e^{nx}}{(\ln x)^2}g_n(x)$ $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\})$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f_n

4) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) عند $+\infty$

5) أرسم المنحنى (C_1) (نعطي $\alpha_1\simeq1,75$ و $f_1(\alpha_1)\simeq10,2$)

التمرين الثاني :

لكل عدد طبيعي n

نعتبر التكاملات التالية : $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\;dt$ و $b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n}t\;dt$

1) أحسب a_0 ; b_0

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $a_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}a_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

3) أ- بين أن $t\le\frac{\pi}{2}\sin t$ $\left(\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$

ب- استنتج أن $0<b_n\le\frac{\pi^2}{4}(a_{2n}-a_{2n+2})$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ج- بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_{2n}}=0$

4) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad a_{2n+2}=(2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,\cos^{2n+1}t\;dt$$

ب- استنتج أن : $\frac{a_{2n+2}}{n+1}=(2n+1)b_n-(2n+2)b_{n+1}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ج- استنتج أن : $2\left(\frac{b_n}{a_{2n}}-\frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right)=\frac{1}{(n+1)^2}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

5) أ- بين أن المتتالية $U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k^2}$ متقاربة و أن نهايتها هي $\frac{\pi^2}{6}$

ب- استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$