هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

تحت إشراف الأستاذ:
يوسف بيب المالكي

حل الفرض المحروس رقم ①
للأسدس الثاني

من إنجاز التلميذة:
جهاد المرلوزي

1- * لنحسب أولا $\lim_{x\to-\infty} f_m(x)$

نضع $x = t_m$

إذن $x \to -\infty \Rightarrow t \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim_{x\to-\infty} (1-x)^m e^{2x}$$
$$= \lim_{t\to-\infty} (1-t_m)^m e^{2t_m}$$
$$= \lim_{t\to-\infty} \left((1-t_m)e^{2t}\right)^m$$
$$= \lim_{t\to-\infty} \left(e^{2t} - \frac{m}{2}(2te^{2t})\right)^m$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = 0$$

[لأن $\lim_{t\to-\infty} e^{2t} = \lim_{t\to-\infty} 2te^{2t} = 0$]

* لنحسب النهاية $\lim_{x\to+\infty} f_m(x)$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim_{x\to+\infty} (1-x)^m e^{2x}$

إذا كان m زوجيا:

لدينا $\lim_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$

وعليه $\lim_{x\to+\infty} (1-x)^m = +\infty$

ونعلم $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$

إذن $\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = +\infty$

إذا كان m فرديا:

لدينا $\lim_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$

وعليه $\lim_{x\to+\infty} (1-x)^m = -\infty$

نعلم أن: $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = -\infty$

2- الفرع النهائي للمنحنى (C_m) عندما

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = \infty$

لنحسب $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_m(x)}{x}$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-x)^m e^{2x}}{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} (1-x)^m \times 2 \times \frac{e^{2x}}{2x}$$

إذا كان m زوجيا:

لدينا $\lim_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$

إذن $\lim_{x\to+\infty} (1-x)^m = +\infty$

ونعلم $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_m(x)}{x} = +\infty$$

إذا كان m فرديا:

$\lim_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} (1-x)^m = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_m(x)}{x} = -\infty$$

$\forall m \in \mathbb{N}^*$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \infty$

(C_m) يقبل فرع شلجمي باتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

3- حساب $f'_m(x)$

$f'_m(x) = \left((1-x)^m e^{2x}\right)'$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

$f_2(x) - f_1(x) = (1-x)e^{2x}(1-x-1)$

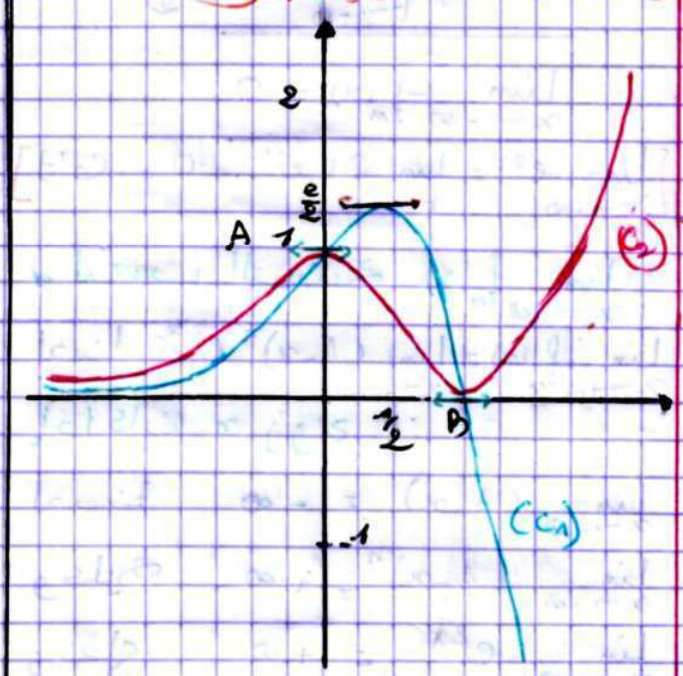
$= x(x-1)e^{2x}$

$f_2(x) - f_1(x) = x(x-1)e^{2x}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي لـ (C_1) و (C_2)	C_2 فوق C_1		A	C_2 تحت C_1	B	C_2 فوق C_1	

بحيث : $A(0,1)$ $B(1,0)$

إنشاء المنحنيين C_1 و C_2.



4- لنحدد الوضع النسبي لـ (C_1) و (C_2).

$f_2(x) - f_1(x) = (1-x)^2 e^{2x} - (1-x)e^{2x}$

$f_n'(x) = -n(1-x)^{n-1}e^{2x} - 2(1-x)^n e^{2x}$

$f_n'(x) = (1-x)^{n-1}e^{2x}(-n+2(1-x))$

$f_n'(x) = (1-x)^{n-1}e^{2x}(2-2x-n)$

بالنسبة لـ f_1

$f_1'(x) = (1-x)^0(2-2x-1)e^{2x}$

$= (1-2x)e^{2x}$

جدول التغيرات.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f_1'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f_1(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{e}{2}$	↘	$-\infty$

بالنسبة لـ f_2

$f_2'(x) = (1-x)e^{2x}(2-2x-2)$

$= -2x(1-x)e^{2x}$

$f_2'(x) = 2x(x-1)e^{2x}$

جدول التغيرات.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_2'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f_2(x)$	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

حيث $F(x) = G(0) - G(x)$

ولدينا $f_1(t)$ قابلة للإستمرار على $]-\infty, 0]$

و $\frac{1}{1+e^{2t}}$ قابلة للإستمرار على $]-\infty, 0]$

إذن $\frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}$ قابلة للإستمرار على $]-\infty, 0]$

وكذلك فإن $G(x)$ قابلة للإستمرار على $]-\infty, 0]$

إذن $F(x)$ قابلة للإستمرار على $]-\infty, 0]$

* لنبين أن $F'(x) = \frac{(1-x)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

لدينا $F'(x) = -G'(x)$

إذن $= -\frac{f_1(x)}{1+e^{2x}}$

وكذلك $= -\frac{(1-x)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

$$F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

ب- لندرس منحى تغيرات الدالة F

لدينا $x \in]-\infty, 0[$

$x < 0 \Rightarrow x-1 < -1 < 0$

$x < 0 \Rightarrow e^{2x} > 1 > 0$

$\Rightarrow e^{2x} + 1 > 0$

إذن $F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}} < 0$

$\Rightarrow F$ تناقصية قطعا على $]-\infty, 0]$

ج- لنبين أن $\frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)dt \leq F(x) \leq \int_x^0 \frac{f_1(t)dt}{1+e^{2x}}$

لدينا $x < t < 0 \Rightarrow 2x < 2t < 0$

$\Rightarrow e^{2x} < e^{2t} < e^0 < 1$

$\Rightarrow 1 + e^{2x} < 1 + e^{2t} < 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{1+e^{2t}} < \frac{1}{1+e^{2x}}$

ولدينا $x < t < 0 \Rightarrow f(t) > 0$

نسب جدول التغيرات .

إذن $\frac{1}{2} < \frac{1}{1+e^{2t}} \leq \frac{1}{1+e^{2x}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}f_1(t) \leq \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}} < \frac{f_1(t)}{1+e^{2x}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)dt \leq \int_x^0 \frac{f_1(t)dt}{1+e^{2t}} < \int_x^0 \frac{f_1(t)dt}{1+e^{2x}}$

$$\frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)dt \leq F(x) < \frac{1}{1+e^{2x}}\int_x^0 f_1(t)dt$$

د- لدينا $\int_x^0 f_1(t)dt = \int_x^0 (1-t)e^{2t}dt$

$= [(1-t)\times\frac{1}{2}e^{2t}]_x^0 - \int_x^0 -\frac{1}{2}e^{2t}$

$= [\frac{(1-t)}{2}e^{2t}]_x^0 + \int_x^0 \frac{1}{2}e^{2t}dt$

$= [\frac{(1-t)}{2}e^{2t}]_x^0 - [\frac{1}{4}e^{2t}]_x^0$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$

$$\int_x^0 f_1(t)dt = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x}$$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

ج- نضع $\lim_{x\to-\infty} F(x) = l$

لدينا $\lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f_1(t)\,dt$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{4} - \frac{2}{4}xe^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x}$

$= \frac{3}{4}$

[لأن $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = 0$]

ونعلم أن

$\frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}}\int_x^0 f_1(t)dt$

حسب خاصيات التفاضل والترتيب

نجد $\boxed{\frac{3}{8} \leq l \leq \frac{3}{4}}$

III- 1-أ- لنبين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\ u_n > 0$

لدينا $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

$0 < x < 1 \Rightarrow -1 < -x < 0$

$\Rightarrow 1-x > 0$ و $e^{2x} > 0$

$\Rightarrow (1-x)^n e^{2x} > 0$

$\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^n e^{2x}\,dx > 0$

$\Rightarrow \int_0^1 f_n(x)\,dx > 0$

$\Rightarrow \boxed{u_n > 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}}$

ب- لتدرس إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على $[0,1]$

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (1-x)^{n+1}e^{2x} - (1-x)^n e^{2x}$

$= (1-x)^n e^{2x}(1-x-1)$

$= -x(1-x)^n e^{2x}$

لدينا $0 < x < 1$

يعني أن $0 < 1-x < 1$ و $e^{2x} > 0$

إذن $\forall x\in[0,1]\ f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$

ج- لنستنتج أن $(u_n)_n$ تناقصية

لدينا $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$

$f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

$\int_0^1 f_{n+1}(x) \leq \int_0^1 f_n(x)$

$\boxed{u_{n+1} \leq u_n}$

$\Rightarrow$ إذن u_n متتالية تناقصية.

2-أ- لنبين أن $u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}u_n$

نضع $u : x \to (1-x)^{n+1}$

$v : x \to \frac{1}{2}e^{2x}$

u و v متقابلتين على $[0,1]$

u و v قابلتين للإشتقاق على $[0,1]$

u' و v' متقابلتين على $[0,1]$

لدينا $u_{n+1} = \int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{2x}\,dx$

$= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 v(x)u'(x)\,dx$

$= -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}\int_0^1 (1-x)^n e^{2x}\,dx$

$\boxed{u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}u_n}$

ب- مساحة الحيز المحصور بين (C_1) و (C_2) و المستقيمين $x=0$ و $x=1$

$S = \int_0^1 |f_2(x) - f_1(x)|\,dx\ u.a$

$= \int_0^1 f_1(x) - f_2(x)\,dx\ u.a$

$= \int_0^1 f_1(x)\,dx - \int_0^1 f_2(x)\,dx\ u.a$

$= (u_1 - u_2)\ u.a$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

إذن $S = u_1 \cdot u_2$ ...

وحسب السؤال (2-أ) نعلم أن

$u_2 = -\frac{1}{2} u_1 \Rightarrow -u_2 \cdot u_1 = \frac{1}{2}$

$S = \frac{1}{2} u \cdot a = \frac{1}{2} \times 4$ (illegible)

وعليه $\boxed{S = 2\ cm^2}$

3- لنبين أن $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$

لدينا حسب الأسئلة 1-أ 1-ج و 2-ج

$0 < u_{n+1} < u_n \Rightarrow 0 < -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} u_n < u_n$

$\frac{1}{2} < \frac{n+1}{2} u_n - \frac{1}{2} < (1 - \frac{n+1}{2}) u_n$

إذن $\frac{1}{n+1} < u_n$ و $u_n < \frac{1}{n-1}$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n+1} < u_n < \frac{1}{n-1}}$

ب- تحديد $\lim_{n \to +\infty} n u_n$ و $\lim_{n \to +\infty} u_n$

بما أن $\frac{1}{n+1} < u_n < \frac{1}{n-1}$

ولدينا $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n-1} = 0$

إذن $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$

ولدينا $\frac{n}{n+1} < n u_n < \frac{n}{n-1}$

بما أن $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n-1} = 1$

فإن $\boxed{\lim_{n \to +\infty} n u_n = 1}$

4- من أجل $n = 1$ $d_1 = \frac{1!}{2^0} d_1$

حالة عجيبة

نفترض أن $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1$

لنبين أن $d_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^n} d_1$

لدينا $d_{n+1} = |v_{n+1} - u_{n+1}|$

$= |1 - \frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} v_n + \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2} u_n|$

$= |\frac{n+1}{2} v_n - \frac{n+1}{2} u_n|$

$= \frac{n+1}{2} |v_n - u_n|$

$= \frac{n+1}{2} d_n$ إذن

ولدينا $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1$

$\frac{n+1}{2} d_n = \frac{(n+1) n!}{2 \times 2^{n-1}} d_1$

$d_{n+1} = \frac{(n+1)}{2^n} d_1$

وعليه فإن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1}$

لنبين أن $\lim_{n \to +\infty} d_n = +\infty$

نعلم أن $d_{n+1} = \frac{n+1}{2} d_n$

ولدينا $\frac{n+1}{2} > 2$

إذن $\forall n \geq 3 \quad d_{n+1} > 2 d_n$

أي $\frac{d_{n+1}}{d_n} > 2$

وعليه فإن $\forall n \geq 3$

$\frac{d_n}{d_{n-1}} \times \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} \times \cdots \frac{d_4}{d_3} > 2^{n-3}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

إذن $d_n \geq 2^{n-3}$

أي $\forall n \geq 3 \quad d_n \geq d_3 \times 2^{n-3}$

بما أن $2 > 1$

$\lim_{n \to +\infty} 2^{n-3} d_3 = +\infty$

وحسب معايير التقارب

$\lim_{n \to +\infty} d_n = +\infty$

ب- نفترض أن $(V_n)_{n \geq 1}$ متتالية متقاربة نعلم أن $(U_n)_{n \geq 1}$ متقاربة ولدينا $d_n = |V_n - U_n|$

إذن d_n متقاربة وهذا تناقض

إذن $(V_n)_{n \geq 1}$ متتالية متباعدة.

III

1- أ- من أجل $n = 1$

$\frac{2^0}{1!} \leq 1$

علاقة صحيحة

نفترض أن $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$

لنبين أن $\frac{2^n}{n+1} \leq 1$

$n \geq 1 \Rightarrow n+2 \geq 2$

$\Rightarrow \frac{2}{n+1} \leq 1$

ولدينا $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$

إذن $\frac{2 \times 2^{n-1}}{n!(n+1)} \leq 1$

وعليه $\frac{2^n}{(n+1)!}$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$

ب- لنبين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad W_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$

لدينا $W_n = \frac{2^n}{n!} U_n$

و $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1 \Rightarrow W_n \leq 2U_n$

$U_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{2x} dx$ مع

ولدينا $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow e^{2x} \leq e^2$

وعلمنا أن $(1-x)^n \geq 0$

إذن $(1-x)^n e^{2x} \leq (1-x)^n e^2$

$U_n \leq e^2 \int_0^1 (1-x)^n dx$

$U_n \leq e^2 \left[\frac{-1}{n+1} (1-x)^{n+1} \right]_0^1$

إذن $U_n \leq \frac{e^2}{n+1}$

$\Rightarrow \boxed{W_n \leq \frac{2e^2}{n+1}}$

لنستنتج أن $\lim_{n \to +\infty} W_n = 0$

لدينا $0 < W_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{2e^2}{n+1} = 0$

إذن حسب نهايات الترتيب

$\boxed{\lim_{n \to +\infty} W_n = 0}$

2- لنبين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad W_{n+1} = \frac{2^n}{(n+1)!} + W_n$

لدينا $W_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} U_{n+1}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

$$w_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\left(-\frac{1}{2} - \frac{n-1}{2}u_n\right)$$

$$w_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + \frac{2^{n+1}(n+1)}{(n+1)n!\,2}u_n$$

$$w_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + \frac{2^n}{n!}u_n$$

$$= -\frac{2^n}{(n+1)!} + w_n$$

إذن $\boxed{w_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + w_n}$

ب- لنحسب مشتقة $\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}$

$$\left(\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}\right)' = \left(\frac{3}{2}-x\right)'e^{2x} - \left(\frac{3}{2}-x\right)(e^{2x})'$$

$$= -e^{2x} + 2\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}$$

$$= -e^{2x} + (3-2x)e^{2x}$$

$$= 2e^{2x}(1-x) = 2f_1(x)$$

إذن $\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}$ هي دالة أصلية لـ $2f_1(x)$

نضع $V(x) = \left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}$

لدينا $w_1 = 2u_1$

$$= 2\int_0^1 f_1(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 2f_1(x)\,dx = [V(x)]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(e^2-3)$$

$\boxed{w_1 = \frac{1}{2}(e^2-3)}$

ج- لنبين أن $w_n = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right)$

من أجل $n \geq 1$ لدينا

$$w_1 = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=1}\frac{2^k}{k!}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(e^2-3)$$ كذلك صحيحة

نفترض أن $w_n = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right)$

لنبين $w_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n+1}\frac{2^k}{k!}\right)$

لدينا $w_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + w_n$

حسب افتراض التراجع $w_n = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right)$

إذن $w_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right) - \frac{2^n}{(n+1)!}$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!} - \frac{2^n}{(n+1)!}\right)$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n+1}\frac{2^k}{k!}\right)$$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $w_n = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right)$

لنستنتج نهاية $\sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}$

لدينا $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$

أي أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right) = 0$

إذن $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!} = e$

انتهى.

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma