فرض محروس — 2SM 2 heure

ثانوية أنيس

## التمرين الأول : 4pt

$E$ مجموعة الحدوديات $P$ درجتها أصغر أو تساوي منع والتي تحقق $P(0) = 0$

1 ـ بين أن $(E, +, .)$ فضاء متجهي حقيقي 2

2 ـ حدد أساسا لـ $E$ واستنتج $\dim E$ 2

## التمرين الثاني 16pt

1 ـ ليكن $\alpha$ عدد عقدي حل للمعادلة: $z^2 + z + 1 = 0$

تحقق أن: $\alpha \times \bar{\alpha} = 1$ و $\alpha + \bar{\alpha} = -1$

2 ـ نعتبر المجموعة

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{ a + b\alpha \ / \ (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \}$$

أ ـ بين أن: $(\mathbb{Z}[\alpha], +)$ زمرة تبادلية

ب ـ بين أن: $\mathbb{Z}[\alpha]$ جزء مستقر في $(\mathbb{C}, \times)$

ج ـ بين أن: $(\mathbb{Z}[\alpha], +, \times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

د ـ بين أن: $\mathbb{Z}[\alpha] = \mathbb{Z}[\bar{\alpha}]$

3 ـ نعتبر التطبيق $f$ المعرف بما يلي:

$$f : \mathbb{Z}[\alpha] \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$a + b\alpha \longmapsto a^2 + b^2 - ab$$

أ ـ بين أن: $\forall z \in \mathbb{Z}[\alpha], \ f(z) = |z|^2$

ب ـ استنتج أن: $f(z) = 0 \iff z = 0$

ج ـ بين أن $f$ تشاكل من $(\mathbb{Z}[\alpha], \times)$ نحو $(\mathbb{Z}, \times)$

4 ـ لتكن $G$ المجموعة المكونة من عناصر $\mathbb{Z}[\alpha]$ التي تقبل مقلوبا في الحلقة $(\mathbb{Z}[\alpha], +, \times)$

أ ـ بين أن: $f(G) = \{1\}$

ب ـ استنتج أن: $G = \{\alpha, -\alpha, 1, -1, 1+\alpha, -1-\alpha\}$

ج ـ بين $(\mathbb{Q}[\alpha], +)$ زمرة تبادلية

د ـ بين أن $(\mathbb{Q}[\alpha]^*, \times)$ زمرة تبادلية

ه ـ استنتج أن $(\mathbb{Q}[\alpha], +, \times)$ جسم تبادلي

Bonne chance

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع
المزيد من الملفات على موقع طالبي