هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الدوال اللوغاريتمية ـ الدوال الأسية حلول مقترحة	استعدادا لاجتياز فروضك

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي ـ مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

I) $g(x)=e^x+e^{-x}-2$

1 لدينا g دالة قابلة للاشتقاق على IR و لدينا : $\forall x\in IR \quad g'(x)=e^x-e^{-x}$

ولدينا : $x\in]-\infty;0] \Rightarrow x\le 0 \Rightarrow 2x\le 0 \Rightarrow x\le -x \Rightarrow e^x\le e^{-x} \Rightarrow g'(x)\le 0$

إذن g تناقصية على $]-\infty;0]$

2 ليكن $x<0$ ، نعتبر الدالة $h(t)=e^t-e^{-t}-2t$ ذات المتغير t ، هذه الدالة متصلة على $[x,0]$ و قابلة للاشتقاق على $]x,0[$ (لأنها متصلة و قابلة للاشتقاق على IR)، إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية فإنه : $h(x)-h(0)=x\,h'(c_x)$ ، $\exists c_x\in]x;0[$ ولدينا : $\forall t\in IR \quad h'(t)=e^t+e^{-t}-2=g(t)$

منه : $h(x)=x\,g(c_x)$ ($h(0)=0$) ، بما أن g تناقصية على $]-\infty;0]$ فإن :

$$x<c_x<0 \Rightarrow g(0)<g(c_x)<g(x) \Rightarrow 0<\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x}<e^x+e^{-x}-2$$

منه : $$x<0 \Rightarrow \frac{e^x+e^{-x}-2}{x}\le\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^2}\le 0$$

بالتالي : $$\forall x<0; \quad \frac{e^x+e^{-x}-2}{x}\le\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^2}\le 0$$

يجب جعل x عددا ثابتا أثناء البرهان و ذلك بالجملة :« ليكن $x<0$ »

في السطر الأخير و بعد أن نكون قد برهنا على صحة المتفاوتة بالنسبة لقيمة ثابتة x ، يحق لنا استنتاج جملة رياضية تتضمن المكمم الكوني تعمم النتيجة لكل الأعداد السالبة.

3 بما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} 0=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\frac{e^x-1+(e^{-x}-1)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\frac{e^x-1}{x}-\frac{e^{-x}-1}{-x}=1-1=0$

فإن : $$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^2}=0$$

4 لدينا الدالة $p(x)$ قابلة للاشتقاق على IR و لدينا :

$$\forall x\in IR \quad p'(x)=(e^x+e^{-x})+x(e^x-e^{-x})-e^x-e^{-x}=x(e^x-e^{-x})$$

وبما أن : $x\in]-\infty;0] \Rightarrow e^x\le e^{-x} \Rightarrow x(e^x-e^{-x})\ge 0 \Rightarrow p'(x)\ge 0$

فإن $p(x)$ تزايدية على $]-\infty;0]$ ، منه : $x\in]-\infty;0] \Rightarrow x\le 0 \Rightarrow p(x)\le p(0) \Rightarrow p(x)\le 0$

إذن : $\forall x\in]-\infty;0] \quad p(x)\le 0$

II) $\forall x<0 \quad f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{x}-2$ ، $\forall x>0 \quad f(x)=x^2\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)$ ، $f(0)=0$

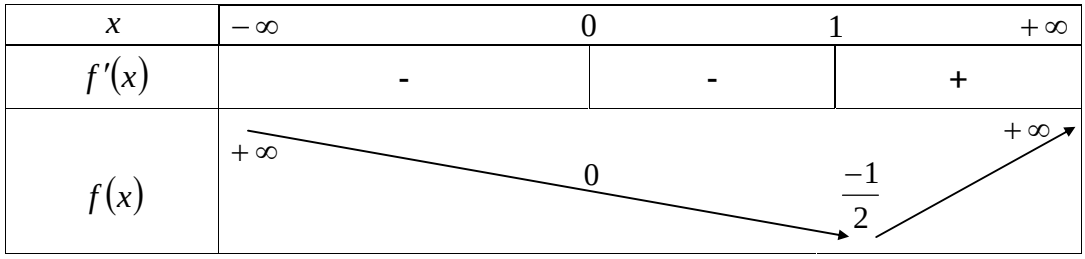
1 لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\frac{e^x-e^{-x}}{x}-2=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\frac{e^x-1-(e^{-x}-1)}{x}-2=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}-2=1+1-2=0$

و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2\ln(x)-\frac{1}{2}x^2=0-0=0$

إذن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)=0=f(0)$ ، بالتالي f متصلة في الصفر

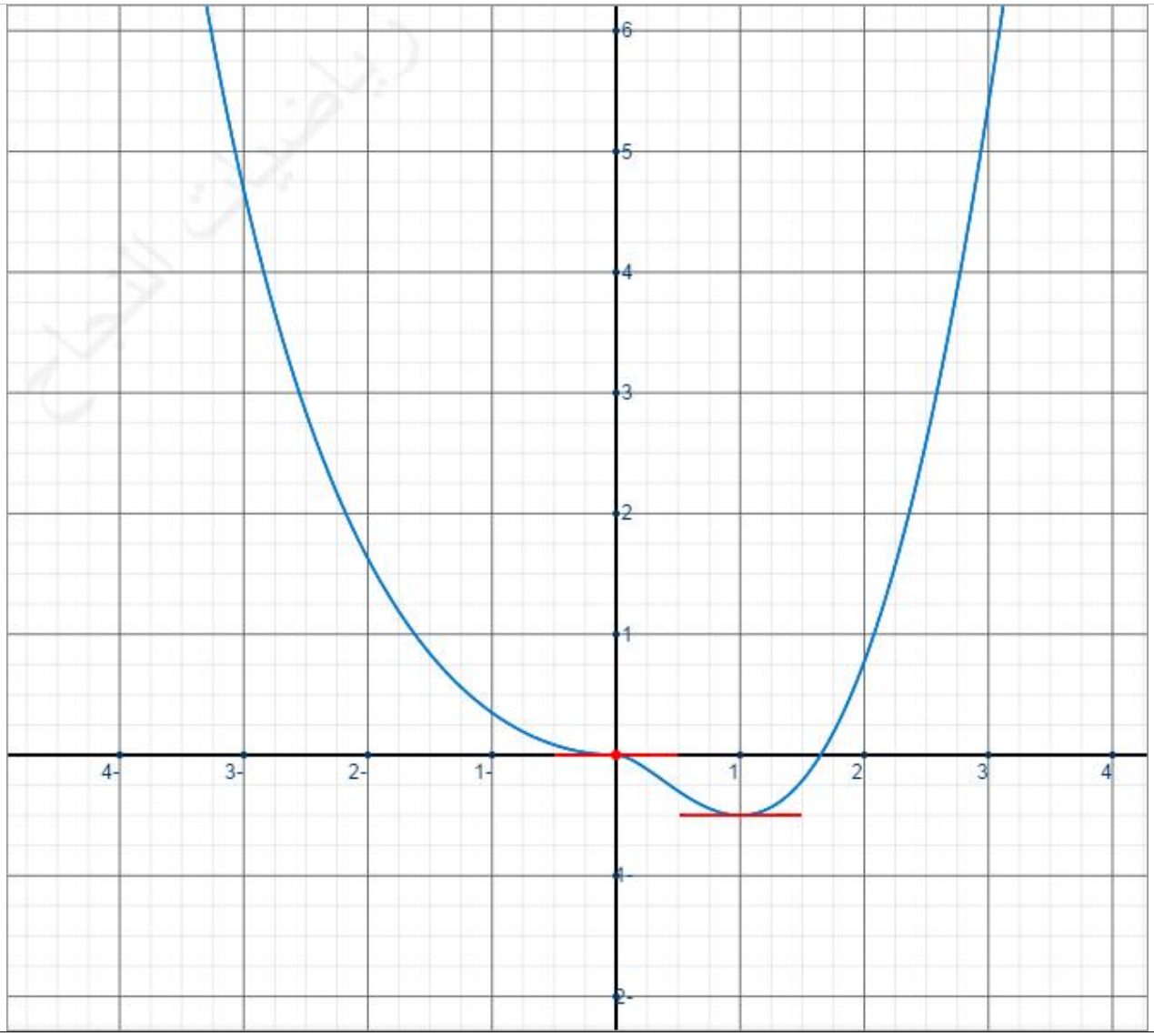
للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

2	لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}x\left(\ln(x)-\dfrac{1}{2}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}x\ln(x)-\dfrac{1}{2}x=0-0=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}-2}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x^2}=0$ (حسب سؤال I 3)) إذن f قابلة للاشتقاق في الصفر حيث : $f'(0)=0$ و هذا يعني أن منحنى الدالة f يقبل مماسا أفقيا في النقطة $O(0;0)$
3	لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\ln(x)-\dfrac{1}{2}\right)=+\infty$ (لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)-\dfrac{1}{2}=+\infty$) و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\ln(x)-\dfrac{1}{2}\right)=+\infty$ (لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)-\dfrac{1}{2}=+\infty$) إذن (Cf) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب جوار $+\infty$ ولدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{e^{-x}}{x}-2=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^{-t}}{-t}-\dfrac{e^t}{t}-2=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{-1}{te^t}-\dfrac{e^t}{t}-2=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x^2}+\dfrac{e^{-x}}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^{-t}}{t^2}+\dfrac{e^t}{t^2}+\dfrac{2}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t^2e^t}+\dfrac{e^t}{t}+\dfrac{2}{t}=+\infty$ (وضعنا : $t=-x$) إذن (Cf) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب جوار $-\infty$
4	لدينا : $\forall x<0\quad f'(x)=\dfrac{\left(e^x+e^{-x}\right)x-\left(e^x-e^{-x}\right)}{x^2}=\dfrac{p(x)}{x^2}$ و $\forall x>0\quad f'(x)=2x\left(\ln(x)-\dfrac{1}{2}\right)+x^2\times\dfrac{1}{x}=2x\ln(x)-x+x=2x\ln(x)$
5	لدينا حسب السؤال I 4) ($\forall x\in]-\infty;0]\quad p(x)\le 0$ منه : $\forall x<0\quad f'(x)\le 0$ ولدينا على $]0;+\infty[$ $f'(x)$ لها نفس إشارة $\ln(x)$ أي لها نفس إشارة الحدانية $x-1$ بالتالي : 
6	لدينا $f(0)=0$ إذن (Cf) يمر من O ولدينا على $]-\infty;0[$ $f(x)<f(0)$ أي $f(x)<0$ وعلى $]0;+\infty[$ ، لدينا : $f(x)=0\Leftrightarrow\ln(x)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$ إذن (Cf) يقطع محور الأفاصيل في النقطتين $O(0,0)$ و $A\left(\sqrt{e},0\right)$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma



7

تمرين 2 : $f_n(x)=\dfrac{e^x}{x}-n;\quad n\geq 3$

1

$Df_n=IR^*$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=-n$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f_n(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f_n(x)=-\infty$

2

لدينا f_n قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها ولدينا : $\forall x\in IR^*\quad f_n'(x)=\dfrac{e^x\,x-e^x}{x^2}=\dfrac{e^x}{x^2}(x-1)$

منه :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$	-		‖	-	0	+	
$f_n(x)$	$-n$	↘	‖	$+\infty$	$e-n$	↗	$+\infty$

3

على $]-\infty;0[$ لدينا : $f_n(x)<-n<0$ ، و على $]0;+\infty[$ لدينا:

$f_n(x)$ متصلة و تناقصية قطعا على $]0;1]$ إذن : $f_n(]0;1])=\left[f_n(1);\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f_n(x)\right[=[e-n;+\infty[$

وبما أن $0\in[e-n;+\infty[$ (لأن : $e-n\leq e-3<0$) و الدالة $f_n(x)$ تباين على $]0;1]$ (لأنها تقابل)

فإن: $\exists!\, u_n\in]0;1]\quad f_n(u_n)=0$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

	$f_n(x)$ متصلة و تزايدية قطعا على $[1;+\infty[$ إذن : $f_n([1;+\infty[)=\left[f_n(1);\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right[=[e-n;+\infty[$ وبما أن $0\in[e-n;+\infty[$ و الدالة $f_n(x)$ تباين على $[1;+\infty[$ فإن: $\exists!\, v_n\in[1;+\infty[\ \ f_n(v_n)=0$ خلاصة : المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلين وحيدين u_n و v_n حيث : $0<u_n<1<v_n$
4	لدينا : $\forall x\in IR^*\quad f_{n+1}(x)=\dfrac{e^x}{x}-(n+1)=f_n(x)-1$ منه: $f_{n+1}(u_n)=f_n(u_n)-1=0-1=-1$ و $f_{n+1}(v_n)=f_n(v_n)-1=0-1=-1$
5	لدينا : $f_{n+1}(u_n)=-1$ و $f_{n+1}(u_{n+1})=0$ منه : $f_{n+1}(u_{n+1})>f_{n+1}(u_n)$ وبما أن : $u_n\in]0;1]$ و f_{n+1} تناقصية على $]0;1]$ فإن $u_{n+1}<u_n$ لدينا : $f_{n+1}(v_n)=-1$ و $f_{n+1}(v_{n+1})=0$ منه : $f_{n+1}(v_{n+1})>f_{n+1}(v_n)$ وبما أن : $v_n\in[1;+\infty[$ و f_{n+1} تزايدية على $[1;+\infty[$ فإن $v_{n+1}>v_n$ بالتالي $(u_n)_{n\geq 3}$ تناقصية و $(v_n)_{n\geq 3}$ تزايدية
	نعلم أنه إذا كانت g دالة تزايدية فإن : $a\geq b\Rightarrow g(a)\geq g(b)$ ، الاستلزام العكسي صحيح لأنه في الحقيقية الاستلزام $g(a)\geq g(b)\Rightarrow a\geq b$ يكافئ $a<b\Rightarrow g(a)<g(b)$ و هو شرط تحققه الدالة التزايدية قطعا وهذا هو المبدأ المستعمل في تحديد رتابة المتتاليتين أعلاه
6	بما أن $(u_n)_{n\geq 3}$ تناقصية و مصغورة بـ 0 فهي متقاربة، نضع : $a=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ لدينا : $f_n(u_n)=0$ منه : $\dfrac{e^{u_n}}{u_n}=n$ منه : $u_n=\dfrac{e^{u_n}}{n}$ بما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=a$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{u_n}=e^a$ منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^{u_n}}{n}=0$ ($\dfrac{\ell}{+\infty}$) بالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$
	يمكن أيضا استعمال التأطير : $0<u_n<1\Rightarrow 1<e^{u_n}<e\Rightarrow \dfrac{1}{n}<\dfrac{e^{u_n}}{n}<\dfrac{e}{n}\Rightarrow \dfrac{1}{n}<u_n<\dfrac{e}{n}$
7	بما أن $(v_n)_{n\geq 3}$ تزايدية فلكي نبين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ يكفي أن نبين أنها غير مكبورة من أجل ذلك نفترض أنها مكبورة ، ولكونها تزايدية سنستنتج أنها متقاربة وبنفس الطريقة السابقة و بوضع $b=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ فنستنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^{v_n}}{n}=0$ منه : $b=0$ لكننا نعلم أن : $\forall n\geq 3\ \ v_n>1$ منه : $b\geq 1$ و هذا غير ممكن إذن $(v_n)_{n\geq 3}$ غير مكبورة بالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$
	يمكن استعمال التأطير هذه الحالة أيضا، لكن ليس بالطريقة السابقة، بل كما يلي : $\begin{cases} v_n=\dfrac{e^{v_n}}{n} \\ v_n>1 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} v_n=\ln(n\,v_n) \\ v_n>\ln(n) \end{cases}$ و حيث أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n)=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ لذلك من المفيد التدرب على إنجاز مثل هذه الأسئلة بطريقتين، لأنه أحيانا لا يتعذر علينا تطبيق إحداهما

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma