

ثانوية الجولان التأهيلية
بيوكري

السنة الثانية بكالوريا
علوم رياضية

السنة الدراسية :
2010 - 2011

فرض محروس رقم : 01
الأستاذ : أحمد مومني

سلم

التنقيط

التمرين رقم : 01 (6 ن)

نصع : $\lambda = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{8}\right)$

و لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ بما يلي :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{\pi}{4} + \text{Arc tan}\left(\frac{1 - \sin x}{\sin(\cos x)}\right) ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ f(x) = \text{Arc tan}\left(\frac{E\left(\frac{2}{2x - \pi}\right) - x + \frac{\pi}{2}}{E\left(\frac{2}{2x - \pi}\right) + x - \frac{\pi}{2}}\right) ; \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lambda \end{array} \right.$$

1 - أ - بين أن : $\lim_{t \rightarrow 0} \left(E\left(\frac{1}{t}\right) + t\right) = 1$ و $\lim_{t \rightarrow 0} \left(E\left(\frac{1}{t}\right) - t\right) = 1$

ب - استنتج : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x)$

2 - تحقق أن لكل x من $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: $\frac{1 - \sin x}{\sin(\cos x)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \left(\frac{\cos x}{\sin(\cos x)}\right)$ ثم استنتج

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)$

3 - بين ان f متصلة في النقطة $\frac{\pi}{2}$

التمرين رقم : 02 (5,5 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1,1[$ بما يلي: $f(x) = 2\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{2}{1+x}} - 1\right)$

1 - بين أن : $0 \leq f(x) < \pi$ لكل x من المجال $]-1,1[$

2 - ليكن x من المجال $]-1,1[$

a - بين أن : $1 - \tan^2\left(\frac{f(x)}{2}\right) = x \left(1 + \tan^2\left(\frac{f(x)}{2}\right)\right)$

b - استنتج أن لكل x من المجال $]-1,1[$: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - f(x)\right) = x$

3 - a - بين أن : $x < y \Rightarrow f(x) - x > f(y) - y$ $(\forall (x, y) \in (]-1,1[)^2)$

b - بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,1[$ بحيث : $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$

1 ن

1,5 ن

1,5 ن

2 ن

0,25 ن

2 ن

1,25 ن

0,5 ن

1,5 ن

التمرين رقم : 03 (8,5 ن)

(I) - ليكن $n \in \mathbb{N}^*$
 نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f_n(t) = (t^n + t^{n-1} + \dots + t) - 1$
 1- أ - بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ الدالة العددية f_n تقبل دالة عكسية f_n^{-1} معرفة على المجال $[-1, +\infty[$

0,5 ن

ب - بين أن المعادلة $f_n(t) = 0$ تقبل حلا وحيدا u_n في المجال $]0, +\infty[$

0,5 ن

ج - أحسب كل من u_1 و u_2

0,75 ن

2 - أ - بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $f_{n+1}(u_n) > 0$

0,5 ن

ب - استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ تناقصية قطعا

0,75 ن

3 - تحقق أن : $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{3}{4}$ ثم استنتج أن : $0 < u_n \leq \frac{3}{4}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$)

0,5 ن

4 - أ - بين أن : $u_n^{n+1} = 2u_n - 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

1,5 ن

ب - حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{n+1}$

0,25 ن

ج - استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة و حدد نهايتها

0,5 ن

(II) - لتكن $(V_n)_{n \geq 1}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $V_n = \frac{1}{2} u_n^{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

1 - أ - تحقق أن : $0 < V_n \leq \frac{1}{4}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$)

0,25 ن

ب - استنتج أن : المتتالية $(V_n)_{n \geq 1}$ متقاربة

0,5 ن

2 - بين أن : $(1 + 2V_n)^{n+1} = 2^{n+2} \times V_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

1 ن

3 - استنتج أن : $0 < 2V_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

1 ن