

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	اتصال دالة / المتتاليات حلول مقترحة	استعدادا لاجتياز فروضك
فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان		
تمارين 1 : احسب النهايات التالية:		
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3 - t^2}{t^3 + t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3}{t^3} = 1$ منه : $t = \sqrt[6]{x}$ نضع :		
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 \sqrt[3]{x+7} - 2}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 (\sqrt[3]{x+7} - 2) + 2x^4 - 2}{1 - x^2}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 (x+7-8)}{(1-x)(1+x) \left((\sqrt[3]{x+7})^2 + 2\sqrt[3]{x+7} + 4 \right)} + 2 \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{1-x^2}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^4}{(1+x) \left((\sqrt[3]{x+7})^2 + 2\sqrt[3]{x+7} + 4 \right)} - 2(x^2+1) = \frac{-1}{2 \times 12} - 4 = \frac{-97}{24}$		
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(1)}{\text{Arctan}(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(1)}{x-1}}{\frac{\text{Arctan}(x-1)}{x-1}}$ لدينا : نضع : $\text{Arctan}(x-1) = u$ فنجد : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Arctan}(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{\tan(u)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan(u)} = \frac{1}{1} = 1$ و نضع : $\text{Arctan}(x) = v$ فنجد : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{v - \frac{\pi}{4}}{\tan(v) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\tan(v) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\tan'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1} = \frac{1}{2}$ بالتالي : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(1)}{\text{Arctan}(x-1)} = \frac{1}{2}$		
تمارين 2 : نعتبر الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{2x}{ x^2-1 }\right)$		
1) لدينا : $Df = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \neq 0\} =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ الآن لدينا من جهة $x \in Df \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow (-x)^2 \neq 1 \Rightarrow -x \in Df$ ومن جهة أخرى : $f(-x) = \text{Arctan}\left(\frac{-2x}{ (-x)^2-1 }\right) = -2\text{Arctan}\left(\frac{2x}{ x^2-1 }\right) = -f(x)$ بالتالي : $\forall x \in Df$ ، f دالة فردية		

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{Arctan} \left(\frac{2x}{|x^2 - 1|} \right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{لدينا:}$$

$$(\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow 1} |x^2 - 1| = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{|x^2 - 1|} = +\infty \quad \text{منه: مع العلم أن: } \lim_{y \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan}(y) = \frac{\pi}{2})$$

$$\text{وأيضاً: } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \operatorname{Arctan} \left(\frac{2x}{|x^2 - 1|} \right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} g(x) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{2x}{|x^2 - 1|} \right); & |x| \neq 1 \\ g(1) = \frac{\pi}{2}; & g(-1) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{إذن: } f \text{ تقبل تمديداً بالاتصال معرف كما يلي:}$$

$$3 \quad \text{لدينا: } \forall x \in [0; 1[\quad \tan(2 \operatorname{Arctan}(x)) = \frac{2 \tan(\operatorname{Arctan}(x))}{1 - \tan^2(\operatorname{Arctan}(x))} = \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{2x}{|1 - x^2|} = \tan(f(x))$$

$$\forall x \in]1; +\infty[\quad \tan(\pi - 2 \operatorname{Arctan}(x)) = \tan(-2 \operatorname{Arctan}(x)) = -\tan(2 \operatorname{Arctan}(x)) = \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2x}{|1 - x^2|} = \tan(f(x))$$

$$\text{ولدينا: } x \in [0; 1[\Rightarrow 0 \leq \operatorname{Arctan}(x) < \operatorname{Arctan}(1) \Rightarrow 0 \leq \operatorname{Arctan}(x) < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq 2 \operatorname{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} x \in]1; +\infty[&\Rightarrow \operatorname{Arctan}(1) < \operatorname{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \operatorname{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 2 \operatorname{Arctan}(x) < \pi \\ &\Rightarrow -\pi < -2 \operatorname{Arctan}(x) < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \pi - 2 \operatorname{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

ولكون الدالة: $x \mapsto \tan x$ تقابلاً في المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ فإننا نستنتج أن:

$$\forall x \in [0; 1[\quad \begin{cases} \tan(2 \operatorname{Arctan}(x)) = \tan(f(x)) \\ 0 < f(x) < \frac{\pi}{2}; \quad 0 < 2 \operatorname{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \forall x \in [0; 1[\quad f(x) = 2 \operatorname{Arctan}(x)$$

$$\forall x \in]1; +\infty[\quad \begin{cases} \tan(\pi - 2 \operatorname{Arctan}(x)) = \tan(f(x)) \\ 0 < f(x) < \frac{\pi}{2}; \quad 0 < \pi - 2 \operatorname{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \forall x \in]1; +\infty[\quad f(x) = \pi - 2 \operatorname{Arctan}(x)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2 \operatorname{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2}}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} 2 \frac{\operatorname{Arctan}(x) - \frac{\pi}{4}}{x - 1}$$

((انظر التمرين الأول))

$$\begin{aligned} &= \lim_{\substack{t \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ t < \frac{\pi}{4}}} 2 \frac{t - \frac{\pi}{4}}{\tan(t) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

4 \quad \text{لدينا:}

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\pi - 2\text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2}}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\frac{\pi}{2} - 2\text{Arctan}(x)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} -2 \frac{\text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{4}}{x - 1} = -1 \text{ و}$$

إذن g قابلة للاشتقاق يمين و يسار 1 لكنها غير قابلة للاشتقاق في 1

$$(\Delta_2): \begin{cases} y = -(x-1) + \frac{\pi}{2} \\ x > 1 \end{cases} \text{ و } (\Delta_1): \begin{cases} y = (x-1) + \frac{\pi}{2} \\ x < 1 \end{cases} \text{ وبذلك فمنحنى الدالة } g \text{ يقبل نصفي مماس معادلتهما:}$$

$$5, \text{ لدينا: } \forall]1; +\infty[\quad f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{2}{\frac{x^2 - 1}{x}}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{2}{x - \frac{1}{x}}\right)$$

$$x > y \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y} \Rightarrow -\frac{1}{x} > -\frac{1}{y} \Rightarrow x - \frac{1}{x} > y - \frac{1}{y} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x - \frac{1}{x}} < \frac{2}{y - \frac{1}{y}} \Rightarrow \text{Arctan}\left(\frac{2}{x - \frac{1}{x}}\right) < \text{Arctan}\left(\frac{2}{y - \frac{1}{y}}\right) : \text{ليكن } x \text{ و } y \text{ عددين من }]1; +\infty[, \text{ لدينا:}$$

$$\Rightarrow f(x) < f(y)$$

إذن f تناقصية قطعاً على $]1; +\infty[$

$$\forall]0; 1[\quad f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{2x}{-x^2 + 1}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{2}{-x + \frac{1}{x}}\right) \text{ و}$$

$$x > y \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} < \frac{1}{y} \\ -x < -y \end{cases} \Rightarrow -x + \frac{1}{x} < -y + \frac{1}{y} < 0 \Rightarrow \frac{2}{x - \frac{1}{x}} > \frac{2}{y - \frac{1}{y}}$$

ليكن x و y عددين من $]0; 1[$ ، لدينا :

$$\Rightarrow \text{Arctan}\left(\frac{2}{-x + \frac{1}{x}}\right) > \text{Arctan}\left(\frac{2}{-y + \frac{1}{y}}\right) \Rightarrow f(x) > f(y)$$

إذن f تزايدية قطعاً على $]0; 1[$

🌿 ستلاحظ أن التعريف يكفي في أحيان كثيرة لدراسة رتابة دالة خصوصاً أن الدالة العكسية لدالة الظل ($\text{Arctan } x$) لم يتم تحديد مشتقتها في درس الاتصال والنهاية، بمعنى لا يمكن الآن استعمال الاشتقاق لدراسة الرتابة.

$\underline{x}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{+\infty}$
$\underline{g'(x)}$	$\underline{+}$		$\underline{=}$
$\underline{g(x)}$	$\underline{\frac{\pi}{2}}$		
	$\underline{0}$	$\underline{0}$	

6, الدالة h متصلة على $[1; +\infty[$ و تناقصية قطعاً عليه إذن فهي تقابل من I نحو

$$J = h([1; +\infty[) = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x); h(1) \right] = \left] 0; \frac{\pi}{2} \right]$$

7, لدينا : $h(1) = \frac{\pi}{2}$ منه : $h^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ، ولكل $x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$

$$h^{-1}(x) = y \Leftrightarrow h(y) = x \Leftrightarrow \pi - 2\text{Arctan}(y) = x \Leftrightarrow \pi - 2\text{Arctan}(y) = x \Leftrightarrow \text{Arctan}(y) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} = \cotan\left(\frac{x}{2}\right)$$

خلاصة : $h(x) = \begin{cases} \cotan\left(\frac{x}{2}\right); x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\\ h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$ أو أيضاً : $\forall x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\quad h(x) = \cotan\left(\frac{x}{2}\right)$ (لأن : $\cotan\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$)

$$f_n : \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow IR$$

$$x \mapsto \tan x - x - n$$

تمرين 3 : من أجل n عدد صحيح طبيعي غير منعدم نعتبر الدالة العددية :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad f'_n(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geq 0 \quad \text{ولدينا : } I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\text{ الدالة } f_n \text{ قابلة للاشتقاق على}$$

إذن فهي تزايدية على I ولكون المعادلة $f'_n(x) = 0$ تقبل عددا معدودا من الحلول (الصفير فقط) فإننا نستنتج أن f_n تزايدية قطعاً على I

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'_n(x)$		+
$f_n(x)$	$-\infty$	$+\infty$

نعتبر المجال : $\left[0; \text{Arctan}\left(n + \frac{\pi}{2}\right) \right] \subset I$ ، الدالة f_n متصلة عليه ولدينا : $f_n(0) = -n < 0$

$$\begin{aligned} f_n\left(\text{Arctan}\left(n + \frac{\pi}{2}\right)\right) &= \tan\left(\text{Arctan}\left(n + \frac{\pi}{2}\right)\right) - \text{Arctan}\left(n + \frac{\pi}{2}\right) - n = n + \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(n + \frac{\pi}{2}\right) - n \\ &= \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(n + \frac{\pi}{2}\right) > 0 \end{aligned}$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن المعادلة : $f_n(x) = 0$ تقبل حلاً α_n على الأقل في $\left[0; \text{Arctan}\left(n + \frac{\pi}{2}\right) \right]$

إذن فهي تقبل حلاً α_n على الأقل في I وبما أنها تزايدية قطعاً على I فإن هذا الحل وحيد.

$$\text{لدينا : } f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 \quad \text{أي : } \tan(\alpha_{n+1}) - \alpha_{n+1} - (n+1) = 0$$

$$\text{ومنه : } \tan(\alpha_{n+1}) - \alpha_{n+1} - n = 1 \quad \text{أي } f_n(\alpha_{n+1}) = 1$$

الآن لدينا: $f_n(\alpha_{n+1})=1$ و $f_n(\alpha_n)=0$ إذن: $f_n(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_n)$ ولكون f_n تزايدية قطعاً فإننا نستنتج أن:
 $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ إذن: $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية قطعاً.

بما أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية قطعاً ومكبورة بـ $\frac{\pi}{2}$ (لأن: $\alpha_n \in I$) فهي متقاربة ولتكن نهايتها

لدينا: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \tan(\alpha_n) - \alpha_n - n = 0$ منه: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n = \text{Arctan}(\alpha_n + n)$

بما أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \ell$ فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n + n = +\infty$ منه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(\alpha_n + n) = \frac{\pi}{2}$ بالتالي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{2}$