

الصفحة 1 5		المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة المركز الوطني للتقويم والامتحانات	
		RS 24	
SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SSS		الموضوع	
4h	مدة الإجابة	الرياضيات	
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	
		الشعبة أو المسالك	

تعليمات:

- مدة الاختبار هي أربع ساعات.
- يتضمن موضوع الاختبار أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن أن تنجز التمارين حسب الترتيب الذي يختاره المترشح.

- التمرين 1 يتعلق بالتحليل.....(10 نقط)
- التمرين 2 يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 نقطة)
- التمرين 3 يتعلق بالبنىات الجبرية.....(3.5 نقطة)
- التمرين 4 يتعلق بالحسابيات.....(3 نقط)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها
لا يسمح باستعمال اللون الأحمر

الصفحة	2	RS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2023 - الموضوع	
5			- مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	

التمرين 1 : (10 نقط)

الجزء I:

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n ، نعتبر الدالة f_n المعرفة على $I = [0, +\infty[$ بما يلي :

$$f_n(0) = 0 \quad \text{و} \quad f_n(x) = \sqrt{x}(\ln x)^n \quad ; \quad (\forall x \in]0, +\infty[)$$

وليكن (C_n) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1- أ) تحقق أن: $\sqrt{x}(\ln x)^n = (2n)^n \left(x^{\frac{1}{2n}} \ln \left(x^{\frac{1}{2n}} \right) \right)^n$; $(\forall x \in]0, +\infty[)$ ، استنتج أن f_n متصلة على اليمين في 0

0.5

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

0.25

ج) تحقق أن: $\frac{f_n(x)}{x} = (2n)^n \left(\frac{\ln \left(x^{\frac{1}{2n}} \right)}{x^{\frac{1}{2n}}} \right)^n$; $(\forall x \in]0, +\infty[)$ ، استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ ثم أول

0.75

مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

د) احسب، حسب زوجية n ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.5

2- أ) بين أن f_n قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و أن :

$$f'_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x)^{n-1} (2n + \ln x) \quad ; \quad (\forall x \in]0, +\infty[)$$

0.75

ب) تحقق أن لكل $n \geq 2$: $f'_n(x) = 0$ تكافئ $(x = e^{-2n} \text{ أو } x = 1)$

0.25

ج) ادرس، حسب زوجية n ، منحى تغيرات f_n و اعط جدول تغيراتها.

1

د) بين أنه إذا كان n فرديا و $n \geq 3$ فإن النقطة ذات الأفصول 1 هي نقطة انعطاف (C_n)

0.25

الجزء II:

1- ليكن $\beta \in]1, e[$ عددا حقيقيا ثابتا. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي :

$$u_n = f_n(\beta) \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

أ) بين أن: $0 < u_n < \sqrt{e}$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

0.25

ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ تناقصية.

0.25

ج) حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

0.25

2- أ) بين أنه لكل عدد صحيح n غير منعدم، يوجد عدد حقيقي وحيد $x_n \in]1, e[$ بحيث: $f_n(x_n) = 1$

0.5

ب) بين أن المتتالية المعرفة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تزايدية، استنتج أنها متقاربة.

0.75

الصفحة	RS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2023 - الموضوع	
3	5	- مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	
3- نضع: $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ (أ) بين أن: $1 < \ell \leq e$ 0.5 (ب) بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln x_n)^n = \frac{1}{\sqrt{\ell}}$ 0.25 (ج) بين أنه إذا كان $\ell < e$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(\ln x_n) = -\infty$ 0.25 (د) استنتج قيمة ℓ 0.25 الجزء III: نضع لكل $x \in I$ ، $F(x) = \int_x^1 (f_1(t))^2 dt$ 1- (أ) بين أن الدالة F متصلة على I 0.25 (ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء مرتين، بين أن: $(\forall x \in]0, +\infty[); F(x) = -\frac{x^2}{2} \ln^2(x) + \frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{1}{4}(1 - x^2)$ 1 2- (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ 0.5 (ب) استنتج قيمة $F(0)$ 0.25 (ج) احسب، بـ cm^3، حجم المجسم المولد بدوران جزء المنحنى (C_1) الموافق للمجال $[0,1]$ دورة كاملة حول محور الأفاصيل. (نأخذ $\ i\ = 1\text{cm}$) 0.5			
التمرين 2: (3.5 نقطة) يمكن أن ينجز الجزءان I و II بشكل مستقل. الجزء I: نعتبر في $\mathbb{R}_+^2$ النظام التالية: $(S): \begin{cases} \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x+y} \right) = \frac{12}{5} \\ \sqrt{y} \left(1 - \frac{1}{x+y} \right) = \frac{4}{5} \end{cases}$ 1- ليكن $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ حلا للنظمة (S). نضع: $z = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$ (أ) بين أن: $z + \frac{1}{z} = \frac{12}{5} + \frac{4}{5}i$ 0.25 (ب) بين أن: $z^2 - \left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i \right)z + 1 = 0$ ، استنتج القيم الممكنة للعدد z 0.75 (نلاحظ أن: $\left(\frac{28}{25} + \frac{96}{25}i = \left(\frac{2}{5}(4 + 3i) \right)^2 \right)$ (ج) استنتج قيم الزوج (x, y) 0.25 2- حل في $\mathbb{R}_+^2$ النظام (S) 0.5			

الصفحة	4	RS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2023 - الموضوع	
5			- مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	

الجزء II:

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$
 لتكن (U) الدائرة التي مركزها O و شعاعها 1 و $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ ثلاث نقط مختلفة مثنى مثنى من (U)

0.25 1- بين أن: $\bar{z} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow |z|=1$; $(\forall z \in \mathbb{C})$

0.5 2- أ) المستقيم المار من A و الموازي للمستقيم (BC) يقطع الدائرة (U) في النقطة $P(p)$

بين أن: $p = \frac{bc}{a}$

0.5 ب) المستقيم المار من A و العمودي على المستقيم (BC) يقطع الدائرة (U) في النقطة $Q(q)$

بين أن: $q = -p$

0.5 ج) المستقيم المار من C و الموازي للمستقيم (AB) يقطع الدائرة (U) في النقطة $R(r)$
 بين أن المستقيمين (PR) و (OB) متعامدان.

التمرين 3: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(M_3(\mathbb{C}), +, \times)$ حلقة واحدة و غير تبادلية وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ليكن $E = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} / (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$

0.25 1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{C}), +, \times)$

2- نزود المجموعة $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعروف بما يلي:

$\forall ((x, z), (x', z')) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C})^2 ; (x, z) * (x', z') = (x + x', z + z')$

و نعتبر التطبيق φ المعروف من E نحو $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ بما يلي:

$\forall (a, b, c) \in \mathbb{C}^3, \varphi(M(a, b, c)) = (a, b + ci)$

0.5 أ) بين أن φ تشاكل من $(E, +)$ نحو $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, +)$ و أن $\varphi(E) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

0.25 ب) استنتج أن $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, *)$ زمرة تبادلية.

3- نزود $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ بقانون التركيب الداخلي T المعروف بما يلي:

$\forall ((x, z), (x', z')) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C})^2 ; (x, z) T (x', z') = (x \operatorname{Re}(z') + x' \operatorname{Re}(z), zz')$

($\operatorname{Re}(z)$ هو الجزء الحقيقي للعدد العقدي z)

0.25 أ) بين أن T تبادلي.

0.25 ب) تحقق أن $(0, 1)$ هو العنصر المحايد للقانون T في $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$

0.5 ج) تحقق أن $(1, i) T (x, -i) = (0, 1)$, $\forall x \in \mathbb{C}$ ؛ استنتج أن T غير تجميعي في $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$

الصفحة	5	RS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2023 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
5			

4- ليكن $G = \{(\text{Im}(z), z) / z \in \mathbb{C}\}$

($\text{Im}(z)$ هو الجزء التخيلي للعدد العقدي z)

(أ) بين أن G زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, *)$

0.25

(نلاحظ أن $(-\text{Im}(z), -z)$ هو مماثل $(\text{Im}(z), z)$ بالنسبة للقانون $*$)

(ب) ليكن ψ التطبيق المعرف من $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ نحو $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ بما يلي: $\psi(z) = (\text{Im}(z), z)$; $\forall z \in \mathbb{C}^*$

0.25

بين أن ψ تشاكل من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, T)$

(ج) استنتج أن $(G - \{(0,0)\}, T)$ زمرة تبادلية.

0.5

5- بين أن $(G, *, T)$ جسم تبادلي.

0.5

التمرين 4: (3 نقط)

ليكن p عددا أوليا فرديا. نضع: $S = 1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^{p-1}$

ليكن q عددا أوليا يقسم S

1- (أ) بين أن p و q أوليان فيما بينهما.

0.5

(ب) استنتج أن: $[q] \equiv 1 \pmod{p^{q-1}}$

0.25

(ج) تحقق أن: $p^p - 1 = (p-1)S$ ، استنتج أن: $[q] \equiv 1 \pmod{p^p}$

0.5

2- نفترض أن p و $q-1$ أوليان فيما بينهما.

(أ) باستعمال مبرهنة بوزوت (Bézout)، بين أن: $[q] \equiv 1 \pmod{p}$

0.75

(ب) استنتج أن $[q] \equiv 1 \pmod{S}$

0.25

3- بين أن: $[p] \equiv 1 \pmod{q}$

0.75

انتهى