

تصحيح التمرين الأول

1- لنبين أن  $E$  زمرة جزئية للزمرة  $(M_3(\mathbb{R}), +)$

$$\checkmark \quad E \neq \emptyset \quad \text{لأن} \quad O = M(0,0) \in E$$

$$\checkmark \quad E \subset M_3(\mathbb{R})$$

$\checkmark$  ليكن  $M(a,b)$  و  $M(c,d)$  من  $E$  :  $M(a,b) - M(c,d) \in E$  ؟

$$M(a,b) - M(c,d) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix} \quad \text{لدينا :}$$

$$M(a,b) - M(c,d) = \begin{pmatrix} a-c & b-d & -b+d \\ 0 & 0 & 0 \\ b-d & -a+c & a-c \end{pmatrix} \quad \text{إذن :}$$

$$M(a,b) - M(c,d) = \begin{pmatrix} a-c & b-d & -(b-d) \\ 0 & 0 & 0 \\ b-d & -(a-c) & a-c \end{pmatrix} \quad \text{إذن :}$$

و منه:  $M(a,b) - M(c,d) = M(a-c, b-d) \in E$  (  $(a-c, b-d) \in \mathbb{R}^2$  )  
و بالتالي :  $E$  زمرة جزئية للزمرة  $(M_3(\mathbb{R}), +)$

2- لنبين أن  $E$  جزء مستقر من  $(M_3(\mathbb{R}), T)$

$$\checkmark \quad \text{لدينا :} \quad E \subset M_3(\mathbb{R})$$

$\checkmark$  ليكن  $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$  و  $M(a,b)$  و  $M(c,d)$  من  $E$

$$M(a,b)TM(c,d) \in E$$

$$\text{لدينا :} \quad M(a,b)TM(c,d) = M(a,b) \times A \times M(c,d)$$

$$M(a,b)TM(c,d) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix} \quad \text{إذن :}$$

$$M(a,b)TM(c,d) = \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix} \quad \text{إذن :}$$

$$M(a,b)TM(c,d) = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc & -(ad+bc) \\ 0 & 0 & 0 \\ ad+bc & -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix} : \text{إذن}$$

و منه :  $M(a,b)TM(c,d) = M(ac-bd, ad+bc) \in E$   $(ac-bd, ad+bc) \in \mathbb{R}^2$   
 إذن  $M(a,b)TM(c,d) \in E$   $(\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4)$   
 و بالتالي :  $E$  جزء مستقر من  $(M_3(\mathbb{R}), T)$

3- أ)

✓ لنبين أن  $\varphi$  تشاكل من  $(\mathbb{C}^*, \times)$  نحو  $(E, T)$

ليكن  $a+ib$  و  $c+id$  من  $\mathbb{C}^*$  بحيث  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$  و  $(c,d) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \varphi((a+ib) \times (c+id)) &= \varphi(a+ib) T \varphi(c+id) \\ \varphi((a+ib) \times (c+id)) &= \varphi((ac-bd) + i(ad+bc)) \\ &= M(ac-bd, ad+bc) \\ &= M(a,b)TM(c,d) \\ &= \varphi(a+ib) T \varphi(c+id) \end{aligned}$$

إذن  $\varphi$  تشاكل من  $(\mathbb{C}^*, \times)$  نحو  $(E, T)$

✓ لنبين أن  $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

• لدينا حسب إنشاء المجموعة  $E$  :  
 لكل  $M$  من  $E^*$  يوجد  $(a,b)$  من  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  بحيث  $M = M(a,b)$   
 إذن يوجد  $z = a+ib$  من  $\mathbb{C}^*$  بحيث  $M = \varphi(a+ib)$

$$\boxed{E^* \subset \varphi(\mathbb{C}^*)} : \text{و منه}$$

• حسب إنشاء التطبيق  $\varphi$  لدينا :  $\varphi(\mathbb{C}^*) \subset E$

$$\begin{aligned} \varphi(a+ib) = O &\Leftrightarrow M(a,b) = M(0,0) \\ &\Leftrightarrow a=b=0 \end{aligned}$$

إذن : لكل  $z$  من  $\mathbb{C}^*$  :  $\varphi(z) \neq O$

$$\boxed{\varphi(\mathbb{C}^*) \subset E^*} : \text{و منه}$$

(ب)

✓ نعلم أن  $(\mathbb{C}^*, \times)$  زمرة تبادلية  $(\mathbb{C}, +, \times)$  جسم تبادلي

و لدينا  $\varphi$  تشاكل من  $(\mathbb{C}^*, \times)$  نحو  $(E, T)$

إذن  $(\varphi(\mathbb{C}^*), T)$  هو زمرة تبادلية

و بما أن  $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$  فإن  $(E^*, T)$  زمرة تبادلية

✓ نعلم أن 1 هو العنصر المحايد ل  $(\mathbb{C}^*, \times)$

إذن  $J = \varphi(1)$  هو العنصر المحايد ل  $(\varphi(\mathbb{C}^*), T)$  أي ل  $(E^*, T)$

$$J = \varphi(1) = \varphi((1) + i(0)) = M(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4- أ) لنبين أن قانون التركيب الداخلي "T" توزيعي بالنسبة لقانون التركيب الداخلي "+" في E

ليكن  $(a, b)$  و  $(c, d)$  و  $(e, f)$  من  $\mathbb{R}^2$

$$M(a, b)T(M(c, d) + M(e, f)) = (M(a, b)TM(c, d)) + (M(a, b)TM(e, f))$$

$$\begin{aligned} M(a, b)T(M(c, d) + M(e, f)) &= M(a, b)TM(c + e, d + f) \\ &= M(a(c + e) - b(d + f); a(d + f) + b(c + e)) \\ &= M(ac + ae - bd - bf; ad + af + bc + be) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (M(a, b)TM(c, d)) + (M(a, b)TM(e, f)) &= M(ac - bd, ad + bc) + M(ae - bf, af + be) \\ &= M(ac - bd + ae - bf; ad + bc + af + be) \end{aligned}$$

إذن لكل  $(a, b)$  و  $(c, d)$  و  $(e, f)$  من  $\mathbb{R}^2$ :

$$M(a, b)T(M(c, d) + M(e, f)) = (M(a, b)TM(c, d)) + (M(a, b)TM(e, f))$$

(ب)

✓ لدينا  $(E, +)$  زمرة تبادلية

✓ و لدينا  $(E^*, T)$  زمرة تبادلية

✓ و "T" توزيعي بالنسبة ل "+" في E

و منه  $(E, +, T)$  جسم تبادلي

تصحيح التمرين الثاني

الجزء الأول :

-1

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2(m+1+i))^2 - 4(2)(m^2 + (1+i)m + i) \\ &= 4(m+1+i)^2 - 8(m^2 + (1+i)m + i) \\ &= 4(m^2 + 2(1+i)m + (1+i)^2) - 8(m^2 + (1+i)m + i) \\ &= 4(m^2 + 2(1+i)m + 2i) - 8(m^2 + (1+i)m + i) \\ &= -4m^2 \\ &= (2im)^2\end{aligned}$$

-2- لنحل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(E)$

لدينا :  $\Delta = (2im)^2$

$$z = \frac{2(m+1+i) - 2im}{2(2)} \quad \text{أو} \quad z = \frac{2(m+1+i) + 2im}{2(2)} \quad \text{إن :}$$

$$z = \frac{m+1+i - im}{2} \quad \text{أو} \quad z = \frac{m+1+i + im}{2} \quad \text{إن :}$$

$$z = \frac{(m+i) - i(m+i)}{2} \quad \text{أو} \quad z = \frac{(m+1) + i(m+1)}{2} \quad \text{إن :}$$

$$z = (m+i)\left(\frac{1-i}{2}\right) \quad \text{أو} \quad z = (m+1)\left(\frac{1+i}{2}\right) \quad \text{إن :}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{1-i}{2}\right)(m+i), \left(\frac{1+i}{2}\right)(m+1) \right\} \quad \text{و منه :}$$

الجزء الثاني :

(أ-1)

$$\begin{aligned} iz_2 + 1 &= i \left( \frac{1-i}{2} (m+i) \right) + 1 \\ &= \frac{1+i}{2} (m+i) + 1 \\ &= \frac{1+i}{2} \left[ m+i + \frac{1}{1+i} \right] \\ &= \frac{1+i}{2} [m+i+1-i] \\ &= \frac{1+i}{2} (m+1) \\ &= z_1 \end{aligned}$$

(ب) لدينا :

$$\begin{aligned} z_1 - \omega &= iz_2 + 1 - \omega \\ &= iz_2 + 1 - \frac{1+i}{2} \\ &= iz_2 + \frac{1-i}{2} \\ &= i \left( z_2 - \frac{1+i}{2} \right) \\ &= i (z_2 - \omega) \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}} (z_2 - \omega) \end{aligned}$$

إذن :  $M_1$  هي صورة  $M_2$  بالدوران الذي مركزه النقطة  $\Omega$  ذات اللوح  $\omega = \frac{1+i}{2}$  و قياس زاويته  $\frac{\pi}{2}$

(أ-2)

$$\begin{aligned}\frac{z_2 - \omega}{z_1 - \omega} &= \frac{\left(\frac{1-i}{2}\right)(m+i) - m}{\left(\frac{1+i}{2}\right)(m+1) - m} \\ &= \frac{(1-i)(m+i) - 2m}{(1+i)(m+1) - 2m} \\ &= \frac{m+i - im + 1 - 2m}{m+1+im+i-2m} \\ &= \frac{1-m+i(1-m)}{1-m+im+i} \\ &= \frac{i(m-1)(i-1)}{(m-i)(i-1)} \\ &= \frac{i(m-1)}{m-i}\end{aligned}$$

ب) نفترض أن  $M$  و  $M_1$  و  $M_2$  مستقيمة

$$\frac{z_2 - m}{z_1 - m} \in \mathbb{R} \quad \text{إذن :}$$

$$i \frac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R} \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{m-1}{m-i} \in i\mathbb{R} \quad \text{إذن :}$$

$$\arg\left(\frac{m-1}{m-i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{إذن :}$$

$$\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{إذن :}$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \quad \text{إذن :}$$

و منه :  $M$  تنتمي إلى الدائرة  $(\Gamma)$  التي أحد أقطارها  $[AB]$

ج) نفترض أن  $\Omega$  و  $M$  و  $M_1$  و  $M_2$  متداورة

$$\frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} \times \frac{z_2 - m}{z_1 - m} \in \mathbb{R} \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} = i \quad \text{و} \quad \frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i \frac{m-1}{m-i}$$

لدينا :

$$\text{إذن : } i \times i \frac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$$

$$\text{إذن : } -\frac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$$

$$\text{إذن : } \frac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$$

إذن :  $M$  و  $A$  و  $B$  مستقيمة

إذن  $M \in (AB)$  بحيث :  $M \neq A$  و  $M \neq B$

( عكسيا نبين أن إذا كان  $M \in (AB)$  بحيث :  $M \neq A$  و  $M \neq B$  فإن  $M$  و  $\Omega$  و  $M_1$  و  $M_2$  متداورة )

و بالتالي مجموعة النقط  $M$  بحيث تكون النقط  $\Omega$  و  $M$  و  $M_1$  و  $M_2$  متداورة هي المستقيم  $(AB)$  محروما من النقطتين  $A$  و  $B$

### تصحيح التمرين الثالث

1- أ) ليكن  $p$  عددا أوليا أكبر من أو يساوي 5

نفترض أن  $p \geq 2017$

لدينا الزوج  $(x, y)$  من  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  إذن :  $x \geq 1$  و  $y \geq 1$

إذن  $px \geq 2017$  و  $y^{p-1} \geq 1$

إذن  $px + y^{p-1} \geq 2018$

إذن  $2017 \geq 2018$  و هذا غير ممكن

و منه :  $p < 2017$

ب) نفترض أن  $p$  يقسم  $y$

إذن  $p$  يقسم  $y^{p-1}$

إذن  $y^{p-1} = kp$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ )

و لدينا :  $px + y^{p-1} = 2017$

إذن  $px + kp = 2017$

إذن  $p(x + k) = 2017$

إذن  $p$  يقسم 2017

و بما أن  $p$  عدد أولي أكبر من أو يساوي 5 فإن  $p = 2017$

و هذا تناقض مع كون  $p < 2017$

و منه  $p$  لا يقسم  $y$

(ج)

✓ لدينا  $p$  عدد أولي و  $p$  لا يقسم  $y$   
إذن حسب مبرهنة فيرما :  $y^{p-1} \equiv 1[p]$   
✓ لدينا :  $px \equiv 0[p]$  و  $y^{p-1} \equiv 1[p]$   
إذن  $px + y^{p-1} \equiv 1[p]$   
إذن  $2017 \equiv 1[p]$   
إذن  $2016 \equiv 0[p]$   
و منه  $p$  يقسم 2016

(د) لدينا  $p$  يقسم 2016  
إذن  $p$  يقسم  $2^5 \times 3 \times 7$   
إذن  $p = 2$  أو  $p = 3$  أو  $p = 7$  (  $p$  عدد أولي )  
و بما أن  $p \geq 5$

-2

✓ إذا كان  $p \neq 7$  : فحسب السؤال 1- (المعادلة لا تقبل حلا  
✓ إذا كان  $p = 7$  :

المعادلة تصبح :  $7x + y^6 = 2017$

بما أن  $x \geq 1$  فإن  $y^6 < 2017$

إذن  $y < 4$

إذن  $y \in \{1, 2, 3\}$  (  $y \in \mathbb{N}^*$  )

• إذا كان  $y = 3$  : المعادلة تصبح :  $7x + 3^6 = 2017$

إذن  $7x = 1288$

إذن  $x = 184$

• إذا كان  $y = 2$  : المعادلة تصبح :  $7x + 2^6 = 2017$

إذن  $7x = 1953$

إذن  $x = 279$

• إذا كان  $y = 1$  : المعادلة تصبح :  $7x + 1 = 2017$

إذن  $7x = 2016$

إذن  $x = 288$

و بالتالي :  $(x, y) \in \{(184, 3); (279, 2); (288, 1)\}$

تصحيح التمرين الرابع

الجزء الأول :

1- أ) لنبين أن الدالة  $f$  متصلة على اليمين في 0

✓ لدينا :  $f(0) = 0$

✓

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} (1-t) e^t$$

$$\left( \begin{array}{l} t = \frac{-1}{x} \\ x \rightarrow 0^+ \\ t \rightarrow -\infty \end{array} \right) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t - t e^t$$

$$= 0$$

بما أن  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0)$  فإن الدالة  $f$  متصلة على اليمين في 0

ب) لنبين أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$$

$$\left( \begin{array}{l} t = \frac{-1}{x} \\ x \rightarrow 0^+ \\ t \rightarrow -\infty \end{array} \right) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (-t + t^2) e^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} -t e^t + t^2 e^t = 0$$

إذن  $f$  قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و لدينا :  $f'_d(0) = 0$

(ج)

✓

$$\bullet \quad ]0, +\infty[ \text{ قابلة للاشتقاق على } f_1 : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$$

$$\bullet \quad ]0, +\infty[ \text{ قابلة للاشتقاق على } f_2 : x \mapsto -\frac{1}{x}$$

$$\mathbb{R} \text{ قابلة للاشتقاق على } f_2 : x \mapsto e^x$$

$$f_2([0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$$

$$\text{إذن } ]0, +\infty[ \text{ قابلة للاشتقاق على } f_4 = f_3 \circ f_2 : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{و بالتالي الدالة } f = f_1 \times f_4 \text{ قابلة للاشتقاق على } ]0, +\infty[$$

$$\checkmark \text{ ليكن } x \in ]0, +\infty[$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \left( 1 + \frac{1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}} \right)' \\ &= \left( 1 + \frac{1}{x} \right)' e^{\frac{1}{x}} + \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \left( e^{\frac{1}{x}} \right)' \\ &= \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \left( \frac{-1}{x} \right)' e^{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \left( -1 + 1 + \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

$$\text{إذن } (\forall x \in ]0, +\infty[) \quad f'(x) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}} = 1 \quad \text{2- أ)}$$

$$\left( \begin{array}{l} t = -\frac{1}{x} \\ x \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} e^t = 1 \end{array} \right. : \text{لأن}$$

التأويل الهندسي :  $(C)$  يقبل مقاربا أفقيا معادلته  $y = 1$  بجوار  $+\infty$

(ب) جدول تغيرات  $f$  :

|         |   |           |
|---------|---|-----------|
| $x$     | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | 0 | +         |
| $f(x)$  | 0 | 1         |

3- (أ) لدينا  $f'(x) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{-1}{x}}$   $(\forall x \in ]0, +\infty[)$

الدالة  $f'$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$

ليكن  $x \in ]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left( \frac{1}{x^3} e^{\frac{-1}{x}} \right)' \\ &= \left( \frac{1}{x^3} \right)' e^{\frac{-1}{x}} + \frac{1}{x^3} \left( e^{\frac{-1}{x}} \right)' \\ &= \frac{-(x^3)'}{(x^3)^2} e^{\frac{-1}{x}} + \frac{1}{x^3} \left( -\frac{1}{x} \right)' e^{\frac{-1}{x}} \\ &= \frac{-3x^2}{x^6} e^{\frac{-1}{x}} + \frac{1}{x^3} \times \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} \\ &= \frac{-3}{x^4} e^{\frac{-1}{x}} + \frac{1}{x^5} e^{\frac{-1}{x}} \\ &= \frac{1}{x^5} e^{\frac{-1}{x}} (-3x + 1) \end{aligned}$$

لدينا :  $\frac{1}{x^5} e^{\frac{-1}{x}} > 0$  إذن إشارة  $f''(x)$  هي إشارة  $-3x + 1$

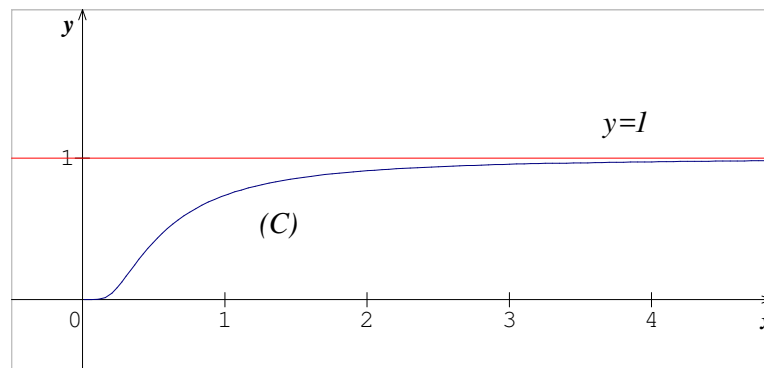
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) > 0 : \left] 0, \frac{1}{3} \right[ \text{ على المجال}$$

$$f''(x) < 0 : \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[ \text{ على المجال}$$

بما أن  $f''$  تنعدم و تغير إشارتها عند  $\frac{1}{3}$  فإن النقطة  $I\left(\frac{1}{3}, 4e^{-3}\right)$  هي نقطة انعطاف للمنحنى  $(C)$

(ج)



الجزء الثاني :

1- ليكن  $x \in [0, +\infty[$

لدينا  $f$  متصلة على  $[0, +\infty[$  ( $1 \in [0, +\infty[$  و  $x \in [0, +\infty[$ )

$x \mapsto x$  و  $x \mapsto 1$  قابلتين للاشتقاق على  $[0, +\infty[$

إذن  $F$  متصلة على  $[0, +\infty[$

ملاحظة :  $(F : x \mapsto \int_x^1 f(t) dt = -\int_1^x f(t) dt)$

2- (أ) ليكن  $x \in ]0, +\infty[$

$$\begin{cases} u(t) = e^{\frac{-1}{t}} \\ v'(t) = 1 \end{cases} \quad \swarrow \quad \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t^2} e^{\frac{-1}{t}} \\ v(t) = t \end{cases} \quad \downarrow$$

$$\begin{aligned} \int_x^1 e^{\frac{-1}{t}} dt &= \left[ t e^{\frac{-1}{t}} \right]_x^1 - \int_x^1 \frac{1}{t} e^{\frac{-1}{t}} dt \\ &= e^{-1} - x e^{\frac{-1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t} e^{\frac{-1}{t}} dt \end{aligned}$$

$$\text{إذن : } (\forall x \in ]0, +\infty[) \int_x^1 e^{\frac{1}{t}} dt = e^{-1} - xe^{\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t} e^{\frac{1}{t}} dt$$

(ب) ليكن  $x \in ]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} \int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right) e^{\frac{1}{t}} dt &= \int_x^1 e^{\frac{1}{t}} dt + \int_x^1 \frac{1}{t} e^{\frac{1}{t}} dt \\ &= e^{-1} - xe^{\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t} e^{\frac{1}{t}} dt + \int_x^1 \frac{1}{t} e^{\frac{1}{t}} dt \\ &= e^{-1} - xe^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

$$\text{إذن : } (\forall x \in ]0, +\infty[) \int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right) e^{\frac{1}{t}} dt = e^{-1} - xe^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{ج) لدينا : } \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right) e^{\frac{1}{t}} dt = F(0)$$

و بما أن  $F$  متصلة على اليمين في  $0$  فإن  $F(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x)$

$$\text{إذن : } F(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{-1} - xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-1} + \frac{1}{t} e^t = e^{-1}$$

$$\text{و منه : } \int_0^1 f(x) dx = e^{-1}$$

3- مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى  $(C)$  و المستقيمت ذات المعادلات :  $x = 0$  و  $x = 2$  و  $y = 0$  :

$$A = \int_0^2 |f(t)| dt \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

$$\text{لدينا : } (\forall x \in [0, 2]) f(x) \geq 0$$

$$\text{إذن : } A = \int_0^2 f(t) dt \times 2cm \times 2cm$$

$$\text{إذن : } A = \left( \int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt \right) \times 4cm^2$$

$$\text{إذن : } A = \left( e^{-1} - \int_2^1 f(t) dt \right) \times 4cm^2$$

$$\text{إذن : } A = \left( e^{-1} - \left( e^{-1} - 2e^{\frac{1}{2}} \right) \right) \times 4cm^2$$

$$\text{و منه : } A = 8e^{\frac{1}{2}} cm^2$$

-4 أ) ليكن  $n \in \mathbb{N}$  :

✓  $F$  متصلة على المجال  $[n, n+2]$

✓  $F$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]n, n+2[$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة : يوجد  $v_n$  من المجال  $]n, n+2[$  بحيث :

$$F(n) - F(n+2) = F'(v_n) \cdot (n - n - 2)$$

$$F(n) - F(n+2) = -2F'(v_n) \quad \text{إذن :}$$

$$(F'(x) = \left( \int_x^1 f(t) dt \right)' = - \left( \int_1^x f(t) dt \right)' = -f(x) = - \left( 1 + \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}})$$

$$u_n = 2 \left( 1 + \frac{1}{v_n} \right) e^{-\frac{1}{v_n}} \quad \text{بحيث :} \quad ]n, n+2[ \quad \text{من المجال } v_n \text{ عدد حقيقي } n \text{ يوجد عدد صحيح طبيعي } n$$

ب) ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$  :

لدينا :  $n \leq v_n \leq n+2$  و الدالة  $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $]0, +\infty[$

$$\text{إذن :} \quad f(n) \leq f(v_n) \leq f(n+2)$$

$$\text{إذن :} \quad \left( 1 + \frac{1}{n} \right) e^{-\frac{1}{n}} \leq \left( 1 + \frac{1}{v_n} \right) e^{-\frac{1}{v_n}} \leq \left( 1 + \frac{1}{n+2} \right) e^{-\frac{1}{n+2}}$$

$$\text{و منه :} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq 2 \left( 1 + \frac{1}{n+2} \right) e^{-\frac{1}{n+2}}$$

$$\text{ج) لدينا :} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq 2 \left( 1 + \frac{1}{n+2} \right) e^{-\frac{1}{n+2}}$$

$$\text{و لدينا :} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left( 1 + \frac{1}{n+2} \right) e^{-\frac{1}{n+2}} = 2 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) e^{-\frac{1}{n}} = 2$$

$$\text{إذن حسب مبرهنة الدرك :} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

### الجزء الثالث :

-1 أ) ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$  :

لنبين أن المعادلة  $f(x) = e^{-\frac{1}{n}}$  تقبل حلاً وحيداً  $a_n$  في المجال  $]0, +\infty[$

✓ لدينا  $f$  متصلة على  $]0, +\infty[$

✓ و لدينا  $f$  تزايدية قطعاً على  $]0, +\infty[$

$$e^{-\frac{1}{n}} \in f(]0, +\infty[) = ]0, 1[ \quad \checkmark$$

و منه لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  المعادلة  $f(x) = e^{-\frac{1}{n}}$  تقبل حلا وحيدا  $a_n$  في المجال  $]0, +\infty[$   
و بالتالي : لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم  $n$  يوجد عدد حقيقي موجب قطعاً وحيد  $a_n$  بحيث :  $f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$   
(ب) ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$  :  
لدينا :  $f(a_{n+1}) = e^{-\frac{1}{n+1}}$  و  $f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$   
و  $f(a_{n+1}) - f(a_n) = e^{-\frac{1}{n+1}} - e^{-\frac{1}{n}} = e^{-\frac{1}{n}} \left( e^{-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}} - 1 \right) = e^{-\frac{1}{n}} \left( e^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1 \right) > 0$   
إذن :  $f(a_{n+1}) > f(a_n)$   
و بما أن  $f$  تقابل تزايدية فإن  $f^{-1}$  أيضاً تقابل تزايدية  
إذن  $f^{-1}(f(a_{n+1})) > f^{-1}(f(a_n))$   
و منه لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  :  $a_{n+1} > a_n$   
و بالتالي :  $(a_n)_{n \geq 1}$  تزايدية  
(ج) ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$  :  
لدينا :

$$\begin{aligned} f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}} &\Leftrightarrow \ln(f(a_n)) = -\frac{1}{n} \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \times e^{\frac{-1}{a_n}}\right) = -\frac{1}{n} \\ &\Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) + \ln\left(e^{\frac{-1}{a_n}}\right) = -\frac{1}{n} \\ &\Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) - \frac{1}{a_n} = -\frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad -\frac{1}{a_n} + \ln\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = -\frac{1}{n}$$

2- (أ) ليكن  $t \in [0, +\infty[$

$$1 - t - \frac{1}{1+t} = \frac{-t^2}{1+t} \leq 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\boxed{1 - t \leq \frac{1}{1+t}} \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{1}{1+t} - (1-t+t^2) = \frac{1-1+t-t^2-t+t^2-t^3}{1+t} = \frac{-t^3}{1+t} \leq 0 \text{ : لدينا}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2} \text{ : إذن}$$

$$(\forall t \in [0, +\infty[) \quad 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2 \text{ : وبالتالي}$$

$$\text{ب) ليكن } x \in [0, +\infty[$$

$$(\forall t \in [0, +\infty[) \quad 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2 \text{ : لدينا}$$

$$\int_0^x (1-t) dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x (1-t+t^2) dt \text{ : إذن}$$

$$\left[ t - \frac{t^2}{2} \right] \leq [\ln(1+t)]_0^x \leq \left[ t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right]_0^x \text{ : إذن}$$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \text{ : إذن}$$

$$(\forall x \in [0, +\infty[) \quad -\frac{x^2}{2} \leq -x + \ln(1+x) \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \text{ : وبالتالي}$$

(أ-3)

$$f(a_4) = e^{-\frac{1}{4}} \text{ و } f(1) = 2e^{-\frac{1}{2}} \text{ : لدينا } \checkmark$$

$$f(a_4) - f(1) = e^{-\frac{1}{4}} - 2e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \left( e^{\frac{3}{4}} - 2 \right) \geq 0 \text{ و}$$

$$f(a_4) \geq f(1) \text{ : إذن}$$

و بما أن  $f$  تقابل تزايدية فإن  $f^{-1}$  أيضا تقابل تزايدية

$$\text{إذن : } f^{-1}(f(a_4)) \geq f^{-1}(f(1))$$

$$\text{و منه : } a_4 \geq 1$$

✓

• من أجل  $n = 4$  :

$$a_4 \geq 1 \text{ : لدينا}$$

• ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 4

$$\blacksquare \text{ نفترض أن } a_n \geq 1$$

$$\blacksquare \text{ و نبين أن } a_{n+1} \geq 1$$

لدينا :  $(a_n)_{n \geq 1}$  تزايدية إذن  $a_{n+1} \geq a_n$  (1)

و حسب الافتراض لدينا :  $a_n \geq 1$  (2)

من (1) و (2) نستنتج أن  $a_{n+1} \geq 1$

• نستنتج أن لكل  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2, 3\}$  :  $a_n \geq 1$

ب) لدينا حسب نتيجة السؤال 2-ب) من الجزء الثالث :  $(\forall x \in [0, +\infty[) \quad -\frac{x^2}{2} \leq -x + \ln(1+x) \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

نأخذ :  $x = \frac{1}{a_n}$

إذن :  $-\frac{1}{2a_n^2} \leq -\frac{1}{a_n} + \ln\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \leq -\frac{1}{2a_n^2} + \frac{1}{3a_n^3}$

و لدينا حسب نتيجة السؤال 1-ج) من الجزء الثالث :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad -\frac{1}{a_n} + \ln\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = -\frac{1}{n}$

إذن :  $-\frac{1}{2a_n^2} \leq -\frac{1}{n} \leq -\frac{1}{2a_n^2} + \frac{1}{3a_n^3}$

إذن :  $-\frac{1}{2} \leq -\frac{a_n^2}{n} \leq -\frac{1}{2} + \frac{1}{3a_n}$

إذن :  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3a_n} \leq \frac{a_n^2}{n} \leq \frac{1}{2}$

و منه :  $1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^2}{n} \leq 1$

(ج)

✓ لدينا :  $a_n \geq 1$

إذن  $3a_n \geq 3$

إذن :  $\frac{2}{3a_n} \leq \frac{2}{3}$

إذن :  $-\frac{2}{3a_n} \geq -\frac{2}{3}$

إذن :  $\frac{1}{3} \leq 1 - \frac{2}{3a_n}$

$$1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^2}{n} \text{ و بما أن}$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{2a_n^2}{n} \text{ فإن}$$

$$\frac{n}{6} \leq a_n^2 \text{ إذن}$$

$$\sqrt{\frac{n}{6}} \leq a_n \text{ و منه}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \text{ إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{6}} = +\infty \text{ و } \sqrt{\frac{n}{6}} \leq a_n \text{ لدينا } \checkmark$$

$$1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^2}{n} \leq 1 \text{ لدينا : (د)}$$

$$\left( 1 - \frac{2}{3a_n} \geq 0 \right) \quad \boxed{\sqrt{1 - \frac{2}{3a_n}} \leq a_n \sqrt{\frac{2}{n}} \leq 1} \text{ إذن :}$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{3a_n}} = \sqrt{1} = 1} \text{ و منه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \text{ بما أن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{n}} = 1 \text{ و التالي حسب مبرهنة الدرك :}$$

تتبع