

*Gassine Mghazli*

## التمرين الأول

$$(0_{M_3(\mathbb{R})} = M(0,0) \in E \text{ لأن } E \neq \emptyset \text{ و } E \subset M_3(\mathbb{R})) \quad -1$$

$$(\forall (M(x,y), M(a,b)) \in E^2); M(x,y) - M(a,b) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+b & 0 & -2b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a-b \end{pmatrix} \quad \text{ولدينا}$$

$$= \begin{pmatrix} (x-a)+(y-b) & 0 & -2(y-b) \\ 0 & 0 & 0 \\ y-b & 0 & (x-a)-(y-b) \end{pmatrix}$$

$$= M(x-a, y-b) \in E$$

إذن

$(M_3(\mathbb{R}), +)$  زمرة جزئية للزمرة  $E$

- لدينا 2

$$(\forall (M(x,y), M(x',y')) \in E^2); M(x,y) \times M(x',y') = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & 0 & -2y' \\ 0 & 0 & 0 \\ y' & 0 & x'-y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x+y)(x'+y') - 2yy' & 0 & -2y(x+y) - 2y(x'-y') \\ 0 & 0 & 0 \\ y(x'+y') + y'(x-y) & 0 & -2yy' + (x-y)(x'-y') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx' + xy' + yx' - yy' & 0 & -2(xy' + yx') \\ 0 & 0 & 0 \\ xy' + yx' & 0 & xx' - yy' - xy' - yx' \end{pmatrix}$$

$$= M(xx' - yy', xy' + yx')$$

إذن

$(\forall (M(x,y), M(x',y')) \in E^2); M(x,y) \times M(x',y') = M(xx' - yy', xy' + yx')$

*Gassine Mghazli*

$$\left( \forall (z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2 \right); \exists! ((x, y), (x', y')) \in (\mathbb{R} - \{(0, 0)\})^2 / z = x + iy \text{ و } z' = x' + iy' \quad (1) - 3$$

$$\varphi(z \times z') = \varphi((x + iy)(x' + iy')) \quad \text{لدينا}$$

$$= \varphi(xx' - yy' + i(xy' + yx'))$$

$$= M(xx' - yy', xy' + yx')$$

$$= M(x, y) \times M(x', y')$$

$$= \varphi(z) \times \varphi(z')$$

إذن

$$(E, \times) \text{ زمرة تبادلية عنصرها المحايد 1 و } \varphi \text{ تشكل من } (\mathbb{C}^*, \times) \text{ نحو } (\varphi(z) \times \varphi(z'))$$

ب) بما أن  $(\mathbb{C}^*, \times)$  زمرة تبادلية عنصرها المحايد 1 و  $\varphi$  تشكل من  $(\mathbb{C}^*, \times)$  نحو

فإن  $\varphi(1) = \varphi(1 + 0i) = M(1, 0)$  و  $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$  و بما أن  $E^*$  زمرة تبادلية عنصرها المحايد  $(1)$  و  $\varphi$  تشكل من  $(\mathbb{C}^*, \times)$  نحو

فإن

$$M(1, 0) \quad \text{زمرة تبادلية عنصرها المحايد } (E^*, \times)$$

- لدينا  $(E^*, \times)$  زمرة تبادلية و  $E$  زمرة جزئية للزمرة  $(E, +)$  إذن  $(M_3(\mathbb{R}), +)$  زمرة تبادلية

ولدينا حسب السؤال 2-  $E$  جزء مستقر من  $(M_3(\mathbb{R}), \times)$  إذن  $\times$  توزيعي على  $-$  في

نستنتج أن

$$(E, +, \times) \quad \text{جسم تبادلي}$$

$$\left( \forall M(x, y) \in E \right); A \times M(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1) - 5$$

$$\left( \forall M(x, y) \in E \right); A \times M(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**تصحيح الامتحان الوطني الموحد-الدورة العادية 2016-مادة:الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية(أ) و(ب)**

*Gassine Mgħażli'*

ب) نفترض أن  $L(M(x,y))$  هو مماثلا في  $M_3(\mathbb{R})$ ,  $\times$

$$A \times M(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \times M(x,y)) \times M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times M^{-1}$$

$$\Rightarrow A \times (M(x,y) \times M^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وهذا تناقض ومنه

**جميع عناصر  $E$  لا تقبل مقلوبا في  $(M_3(\mathbb{R}), \times)$**

## التمرين الثاني

الجزء الاول

1- لدينا  $(a^3)^{57} \equiv (-b^3)^{57} [173]$  إذن  $a^3 \equiv -b^3 [173]$  و منه  $a^3 + b^3 \Leftrightarrow a^3 \equiv b^3 [173]$

و وبالتالي

$$a^{171} \equiv -b^{171} [173]$$

2- لدينا  $173$  أولي و  $a | 173$  إذن  $(a | 173) \wedge (b | 173)$  و بما أن  $a^3 + b^3 \equiv 0 [173]$

و بما أن  $a^3 \equiv -b^3 [173]$  فإن  $(173 | a^3 \Leftrightarrow 173 | b^3)$  نستنتج أن

$$173 | a \Leftrightarrow 173 | b$$

3- لدينا  $(173 | a \wedge 173 | b) \Rightarrow 173 | ab$  و منه  $(173 | a \wedge 173 | b) \Rightarrow 173 | ab$

$$173 | a+b$$

نستنتج أن

4- أ) لدينا  $173$  لا يقسم  $a$  إذن حسب 2- لا يقسم  $b$  و منه حسب مبرهنة فرما الصغرى  $a^{172} \equiv 1 [173]$  و  $b^{172} \equiv 1 [173]$  نستنتج أن

$$a^{172} \equiv b^{172} [173]$$

و منه  $a^{172} \equiv -ba^{171} [173]$  إذن  $a^{172} \equiv b^{172} [173]$  و  $a^{171} \equiv -b^{171} [173]$

$$a^{171}(a+b) \equiv 0 [173]$$

ج) بما أن  $173$  لا يقسم  $a$  فإن  $173$  لا يقسم  $a^{171}$  و بما أن  $173$  أولي فإن  $a^{171} \equiv 1 [173]$  و بما أن  $a^{171} \wedge 173 = 1$  و بما أن  $a^{171} \wedge b^{171} = 1$  فإن حسب مبرهنة كوص

$$173 | a+b$$

Gassine Mghazli

الجزء الثاني

-1- لكل  $x$  و  $y$  و  $k$  من  $\mathbb{N}^*$  لدينا :

$$\begin{cases} x+y=173k \\ x^3+y^3=173(xy+1) \end{cases} \Rightarrow (x^2-xy+y^2)173k=173(xy+1) \\ \Rightarrow k((x-y)^2+xy)=(xy+1) \\ \Rightarrow k(x-y)^2=1+xy(1-k) \\ \Rightarrow k(x-y)^2+(k-1)xy=1$$

إذن

$$k(x-y)^2+(k-1)xy=1$$

-2- نفترض أن  $k \neq 1$  حسب السؤال السابق لدينا  $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$   
(\* )  $k(x-y)^2=1-(k-1)xy$  إذن

وبيما أن  $x$  و  $y$  و  $k$  من  $\mathbb{N}^*$  فإن  $2 \leq k \geq 1$  و  $xy \geq 1$  و منه  $(k-1)xy \geq 1$  ما يستلزم أن

أي أن  $x = y$  المعادلة (\*) تصبح  $(k-1)xy=1$  ما يستلزم أن  $k-1=x=y=1$  و هذا تناقض مع كون

$k=1$  إذن الافتراض الأول خاطئ وعكسه هو الصحيح:  $x+y=173k \geq 173$

$$(E) \Rightarrow \begin{cases} (x-y)^2=1 \\ x+y=173 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)=1 \\ x+y=173 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} (x-y)=-1 \\ x+y=173 \end{cases} \quad \text{لدينا} \\ \Rightarrow \begin{cases} 2x=174 \\ 2y=172 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} 2x=172 \\ 2y=174 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x=87 \\ y=86 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=86 \\ y=87 \end{cases}$$

وعكسا لدينا  $87^3+86^3=(86+87)(87^2-87\times86+86^2)=173(87+86^2)=173(1+86\times87)$

مجموعة حلول المعادلة (E) هي إذن

$$S=\{(87,86);(86,87)\}$$

*Gassine Mghazli*

## التمرين الثالث

$$\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1 z_2 - z z_2}{z_1 z_2 - z z_1} = \frac{\frac{1}{2}(z(z_1 + z_2) - 2zz_2)}{\frac{1}{2}(z(z_1 + z_2) - 2zz_1)} = \frac{z(z_1 - z_2)}{z(z_2 - z_1)} = -1 \quad \text{لدينا}$$

إذن

$$\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1$$

ب) بما أن النقط  $O$  و  $M$  و  $M_1$  و  $M_2$  غير مستقيمية و  $M_1$  و  $M_2$  فإنها نقط متداورة ومنه

**النقطة  $M$  تتنمي للدائرة المحيطة بالمتلث  $OM_1M_2$**

$$(z_2 = \bar{z}_1 \quad z_1 = \bar{z}_2) \quad \text{لأن } z = \frac{2\bar{z}_1\bar{z}_2}{z_1 + z_2} = \frac{2\bar{z}_1\bar{z}_2}{\bar{z}_1 + \bar{z}_2} = \frac{2z_2\bar{z}_2}{z_2 + z_1} = \frac{2z_2z_1}{z_2 + z_1} = z \quad \text{لدينا}$$

إذن  $z = \bar{z}$  ومنه  $z \in \mathbb{R}$  نستنتج أن

**$M$  تتنمي للمحور الحقيقي**

3- أ) الصيغة العقدية الدوران الذي مركزه  $O$  و زاويته  $\alpha$  هي:  $z' = e^{i\alpha}z$  وبما أن صورة  $M_1$  بهذا الدوران هي  $M_2$  فإن

$$z_2 = e^{i\alpha}z_1$$

ب) بما أن  $z_1$  و  $z_2$  مترافقين فإن  $M_1$  و  $M_2$  متماثلين بالنسبة للمحور الحقيقي و منه منتصف القطعة  $[M_1M_2]$  ينتمي المحور الحقيقي

و بما أن  $OM_1 = OM_2$  فإن واسط القطعة  $[M_1M_2]$  هو المحور الحقيقي نستنتج حسب السؤال 2- أن

**$[M_1M_2]$  تتنمي لواسط القطعة  $M$**

$$z_1 z_2 = \frac{e^{i\theta} - 1}{6} \quad \text{و} \quad z_1 + z_2 = \frac{e^{i\theta} + 1}{6} \quad \text{إذن} \quad 6t^2 - (e^{i\theta} + 1)t + (e^{i\theta} - 1) = 0 \quad \text{لـ 4} \quad (z_1 \text{ و } z_2 \text{ حلـي المعادلة})$$

$$z = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} : z = \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2} = 2 \frac{\frac{e^{i\theta} - 1}{6}}{\frac{e^{i\theta} + 1}{6}} = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} \quad \text{إذن}$$

*Gassine Mghazli*

$$z = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = 2 \frac{e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}} + e^{-\frac{i\theta}{2}}} = 2 \frac{2i \sin \frac{\theta}{2}}{2 \cos \frac{\theta}{2}} = 2i \tan \frac{\theta}{2}$$

لدينا بـ

و بما أن  $\theta \in [0, \pi]$  فإن  $\tan \frac{\theta}{2} > 0$  ومنه  $\frac{\theta}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  نستنتج أن الشكل المثلثي لـ  $z$  هو

$$z = \left[ 2 \tan \frac{\theta}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

## التمرين الرابع

### الجزء الأول

- 1- لكل  $x$  من  $[0, +\infty]$  الدالة  $\varphi: t \rightarrow e^{-t}$  متصلة على  $[0, x]$  و قابلة للاشتقاق على  $[0, x]$  إذن حسب مبرهنة التزايدات المتئية

يوجد  $\theta$  من  $[0, x]$  بحيث  $\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(\theta)$  ومنه

$$(\forall x \in ]0, +\infty[); (\exists \theta \in ]0, x[) / e^\theta = \frac{x}{1 - e^{-x}}$$

$(\forall x > 0); 0 < \theta < x \Rightarrow 1 < e^\theta < e^x \Rightarrow 1 < \frac{x}{1 - e^{-x}} < e^x$  - 2 (أ) و (ب) لدينا

$$\Rightarrow 1 - e^{-x} < x < e^x (1 - e^{-x})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - e^{-x} < x \\ x < e^x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - x < e^{-x} \\ x + 1 < e^x \end{cases}$$

إذن

$$(\forall x > 0); x + 1 < e^x \text{ و } (\forall x > 0); 1 - x < e^{-x}$$

$(\forall x > 0); 0 < \theta < x \Rightarrow 1 < e^\theta < e^x \Rightarrow 1 < \frac{x}{1 - e^{-x}} < e^x$  - ج لدينا

$$\Rightarrow 1 < \frac{xe^x}{e^x - 1} < e^x \Rightarrow 0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right) < x$$

(لأن الدالة  $\ln$  تزايدية قطعا على  $[0, +\infty]$ ) و منه

$$(\forall x > 0); 0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right) < x$$

*Gassine Mghazli*

الجزء الثاني

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = 1 \times \frac{1}{1} = 1 = f(1)$$

لدينا (-1)

إذن  $f$  متصلة على اليمين في 0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = 0$$

لدينا 0

إذن  $y = x$  مقارب مائل بجوار  $+\infty$  معادله

-2 أ) لدينا حسب 2-أ) من الجزء الأول:  $\forall t > 0; 1-t < e^{-t}$  إذن  $\forall t \geq 0; 1-t \leq e^{-t}$

$$(\forall x \geq 0); \int_0^x (1-t) dt \leq \int_0^x e^{-t} dt$$

$$(\forall x \geq 0); \left[ t - \frac{t^2}{2} \right]_0^x \leq \left[ -e^{-t} \right]_0^x$$

يستلزم

ومنه

$$(\forall x \geq 0); x - \frac{x^2}{2} \leq -e^{-x} + 1$$

$$(\forall x \geq 0); x - \frac{x^2}{2} \leq -e^{-x} + 1 \Rightarrow (\forall x \geq 0); \begin{cases} e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2} \\ \int_0^x t - \frac{t^2}{2} dt \leq \int_0^x (-e^{-t} + 1) dt \end{cases}$$

لدينا

$$\Rightarrow (\forall x > 0); \begin{cases} e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2} \\ \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \right]_0^x \leq \left[ e^{-t} + t \right]_0^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\forall x > 0); \begin{cases} e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2} \\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \end{cases}$$

*Gassine Mghazli*

ومنه

$$\boxed{(\forall x > 0); \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}}$$

$$\begin{aligned} (\forall x > 0); \frac{f(x) - 1}{x} &= \frac{\frac{xe^x}{e^x - 1} - 1}{x} \\ &= \frac{xe^x - e^x - 1}{x(e^x - 1)} \\ &= \frac{x}{x^2(e^x - 1)} \times e^x(x - 1 - e^{-x}) \\ &= \frac{f(x)}{x^2}(x - 1 - e^{-x}) \end{aligned} \quad \text{لدينا أ - 3}$$

إذن

$$\boxed{(\forall x > 0); \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{x - 1 - e^{-x}}{x^2} f(x)}$$

$$(\forall x > 0); \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2} \Rightarrow (\forall x > 0); \frac{1}{2} - \frac{x}{6} \leq \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{لدينا ب}$$

$$\Rightarrow (\forall x > 0); \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{6} \right) f(x) \leq \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} f(x) \leq \frac{1}{2} f(x)$$

$$\Rightarrow (\forall x > 0); \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{6} \right) f(x) \leq \frac{f(x) - 1}{x} \leq \frac{1}{2} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{6} \right) f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} f(x) = \frac{1}{2} f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{وبما أن}$$

فإن

$$\boxed{f_d'(0) = \frac{1}{2} \quad \text{و منه } f \text{ قابلة للاشتقاق على اليمين في } 0 \text{ و} }$$

-4 ) الدوال  $x \rightarrow x$  و  $x \rightarrow e^x$  و  $1 \rightarrow x$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و بالخصوص على  $[0, +\infty]$  إذن الدالتين

$$(\forall x > 0); e^x - 1 \neq 0 \quad \text{و بما أن}$$

$$\text{فإن الدالة } x \rightarrow \frac{xe^x}{e^x - 1} \text{ قابلة للاشتقاق على } [0, +\infty]$$

*Gassine Mghazli*

صفحة 8

-إنجاز- ذياسين المغازلي-

خلاصة

الدالة  $f$  قابلة للاشتغال على  $[0, +\infty]$

$$\begin{aligned} (\forall x > 0); f'(x) &= \frac{(e^x + xe^x)(e^x - 1) - xe^x e^x}{(e^x - 1)^2} \quad \text{لدينا} \\ &= \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} ((x+1)(e^x - 1) - xe^x) \\ &= \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} (xe^x - x + e^x - 1 - xe^x) \\ &= \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} (e^x - x - 1) \end{aligned}$$

إذن

$$(\forall x > 0); f'(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} (e^x - x - 1)$$

ب) حسب السؤال 2- ب) من الجملة الأولى لدينا  $e^x > x + 1$

إذن  $(\forall x > 0); f'(x) > 0$  و منه  $\forall x > 0; e^x - x - 1 > 0$

نستنتج أن الدالة  $f$  تزايدية قطعا على  $[0, +\infty]$

الجزء الثالث

1- برهان بالترجع على العلاقة " $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$ "

لدينا  $u_0 > 0$  إذن العلاقة صحيحة من أجل  $n = 0$

ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}$  نفترض أن  $u_n > 0$  و نبين أن  $u_{n+1} > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}; u_n > 0 \Rightarrow f(u_n) > f(0) \Rightarrow \ln(f(u_n)) > \ln(f(0))$

و بما أن  $u_{n+1} > 0$  فإن  $\ln(f(0)) = \ln(1) = 0$

حسب مبدأ الترجع نستنتج أن

$(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$

Gassine Mghazli

صفحة 9

-إنجاز- ذياسين المغازلي-

$$2 - \text{لدينا حسب السؤال 2- ج) } (\forall x > 0); 0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right) < x$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < \ln\left(\frac{u_n e^{u_n}}{e^{u_n} - 1}\right) < u_n \text{ فإن } (\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$$

نستنتج أن  $u_n < \ln(f(u_n))$

إذن

المتالية  $(u_n)$  تناقصية قطعاً وبما أنها مصغورة بـ 0 فهي إذن متقاربة

$$3 - \text{لدينا } (\forall x > 0); e^x > x + 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > x \Leftrightarrow \frac{x}{e^x - 1} < 1 \Leftrightarrow \frac{xe^x}{e^x - 1} < e^x \Leftrightarrow f(x) < e^x \Leftrightarrow \ln(f(x)) < x$$

$$\ln(f(0)) = 0$$

$$\begin{cases} (\forall x > 0); \ln(f(x)) \neq x \\ \ln(f(0)) = 0 \end{cases} \text{ إذن}$$

$\ln(f(x)) = x$  هو الحل الوحيد للمعادلة

المتالية  $(u_n)$  متقاربة و الدالة  $\ln \circ f$  متصلة على  $[0, +\infty[$  وتحقق

إذن نهايتها  $l$  تتحقق المعادلة  $\ln(f(l)) = l$  نستنتج أن

$$\lim u_n = 0$$

## التمرين الخامس

$$1 - \text{لدينا } (\forall t \in [0, +\infty[); \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} > 0$$

$$(\forall x \in [\ln 2, +\infty[); \int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt > 0 \text{ و } (\forall x \in ]0, \ln 2[); \int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt < 0$$

و منه إشارة  $F(x)$  كما يلي

$F(\ln 2)$  موجبة قطعاً على المجال  $[\ln 2, +\infty[$

$F(\ln 2) = 0$  سالبة قطعاً على المجال  $]0, \ln 2[$  و

*Gassine Mghazli*

ب) الدالة  $F$  هي أصلية الدالة  $\ln x$  على  $[0, +\infty]$  و التي تنعدم عند 2

إذن  $F$  قابلة للاشتاقاق على  $[0, +\infty]$  ولدينا

$$\boxed{(\forall x \in [0, +\infty]); F'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}}$$

ج) لدينا  $0 < \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} < \infty$  إذن  $(\forall x \in [0, +\infty]); F'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} > 0$

**الدالة  $F$  تزايدية قطعا على  $[0, +\infty]$**

$$\begin{cases} du = \frac{e^t}{2u} dt = \frac{u^2 + 1}{2u} dt \Leftrightarrow dt = \frac{2u}{u^2 + 1} du \\ t = x \Leftrightarrow u = \sqrt{e^x - 1} \\ t = \ln 2 \Leftrightarrow u = 1 \end{cases} \quad \text{أ) بوضع } u = \sqrt{e^x - 1} \text{ يكون لدينا}$$

$$\int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = \int_1^{\sqrt{e^x - 1}} \frac{1}{u} \frac{2u}{u^2 + 1} du = \int_1^{\sqrt{e^x - 1}} \frac{2}{u^2 + 1} du \quad \text{ومنه}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \left[ \arctan \right]_1^{\sqrt{e^x - 1}} = 2 \left( \arctan \left( \sqrt{e^x - 1} \right) - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2 \arctan \left( \sqrt{e^x - 1} \right) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

إذن

$$\boxed{\int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = 2 \arctan \left( \sqrt{e^x - 1} \right) - \frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \arctan \left( \sqrt{e^x - 1} \right) - \frac{\pi}{2} = 2 \arctan(0) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{ب) لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \arctan \left( \sqrt{e^x - 1} \right) - \frac{\pi}{2} = 2 \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{و}$$

*Gassine Mghazli*

ومنه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = -\frac{\pi}{2}$$

[3] - أ)  $F$  قابلة للاشتغال على  $[0, +\infty]$  إذن متصلة عليه و بما أنها تزايدية قطعا على  $[0, +\infty]$

فهي إذن تقابل من  $[0, +\infty]$  نحو  $F$

$$F([0, +\infty]) = \left[ \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \right] = \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

إذن

$$\boxed{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ تقابل من } [0, +\infty] \text{ نحو } F}$$

$$(\forall y \in [0, +\infty]); (\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad F(y) = x \Leftrightarrow 2 \arctan(\sqrt{e^y - 1}) - \frac{\pi}{2} = x) \quad (ب)$$

$$\Leftrightarrow \arctan(\sqrt{e^y - 1}) = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{e^y - 1} = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^y = 1 + \tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \ln\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

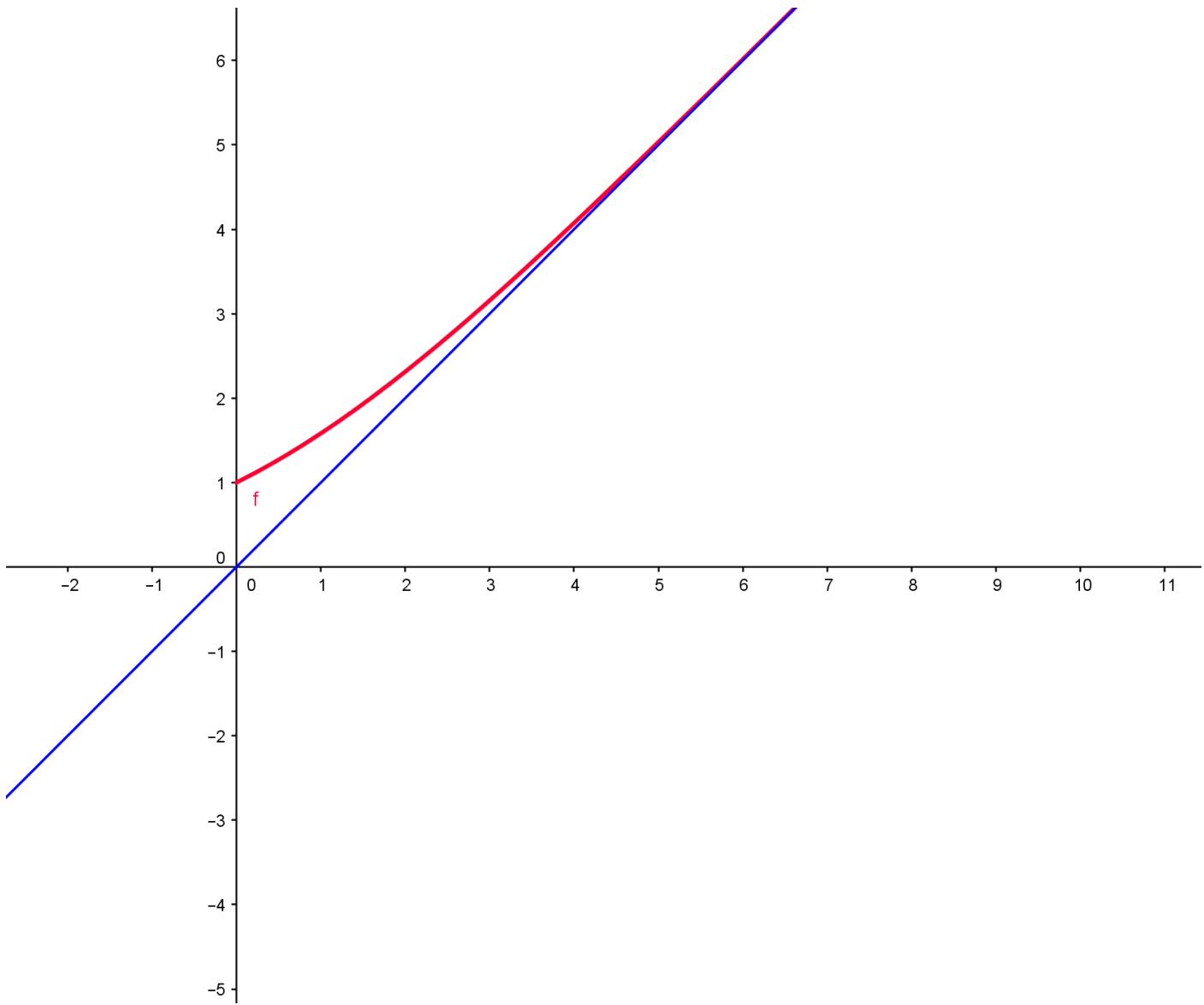
ومنه

$$\boxed{\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] ; F^{-1}(x) = \ln\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \quad \text{و} \quad [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ تقابل من } [0, +\infty] \text{ نحو } F}$$

Gassine Mghazli

إضافة

مبيان الدالة  $f$



*Gassine Mghazli*

مبيان الدالة  $F$

