

Gassine Mghazli

التمرين الاول

الجزء الأول

$\mathbb{R}$  مزود بالقانون  $*$  المعروف كما يلي :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; x * y = x + y - e^{xy} + 1$

(1) أ) لنبين أن القانون  $*$  تبادلي.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; x * y = x + y - e^{xy} + 1 = y + x - e^{yx} + 1 = y * x$$

لدينا  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; x * y = y * x$  إذن

القانون  $*$  تبادلي

(ب) لنبين أن القانون  $*$  يقبل عنصرا محايدا نحدده.

ليكن  $y$  من  $\mathbb{R}$

$$(\forall x \in \mathbb{R}; x * y = x) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}; x + y - e^{xy} + 1 = x) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}; y + 1 = e^{xy}) \Leftrightarrow (y = 0)$$

و بما أن  $*$  تبادلي فإن  $\forall x \in \mathbb{R}; x * 0 = 0 * x = x$

0 هو العنصر المحايد للقانون  $*$

(2) لنبين أن القانون  $*$  غير تجميعي

$$3 + \alpha - e^{-2\alpha} = 3 + \beta - e^{-2\beta} = 0 \text{ يعني } 3 + x - e^{2x} = 0 \text{ حلين مختلفين للمعادلة } \alpha \text{ و } \beta$$

$$\alpha * (2 * \beta) = \alpha * 0 = \alpha \text{ و } (\alpha * 2) * \beta = 0 * \beta = \beta \text{ يعني } \alpha * 2 = \beta * 2 = 0 \text{ و منه}$$

$$\alpha * (2 * \beta) \neq (\alpha * 2) * \beta \text{ فإن } \alpha \neq \beta$$

القانون  $*$  غير تجميعي

نستنتج ان

الجزء الثاني

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x \end{pmatrix} \text{ مع } F = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

(1) لنبين أن  $F$  فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

$$F \subset M_2(\mathbb{R}) \text{ (حسب تعريفه) و } F \neq \emptyset \text{ لأن } (I = M(1, 0) \in F)$$

$$\forall (M(x, y), M(z, t)) \in F^2 \text{ و } \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

تصحيح الإمتحان الوطني الموحد لمادة الرياضيات شعبة العلوم الرياضية دورة يوليوز 2015

Gassine Mghazli

لدينا

$$\alpha M(x, y) + \beta M(z, t) = \begin{pmatrix} \alpha x & -2\alpha y \\ \frac{\alpha y}{2} & \alpha x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta z & -2\beta t \\ \frac{\beta t}{2} & \beta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta z & -2(\alpha y + \beta t) \\ \frac{\alpha y + \beta t}{2} & \alpha x + \beta z \end{pmatrix} = M(\alpha x + \beta z, \alpha y + \beta t)$$

إذن  $\alpha M(x, y) + \beta M(z, t) \in F$  نستنتج أن :

$F$  فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

(2) لنبين أن  $F$  جزء مستقر من  $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

لدينا

$$\begin{aligned} (\forall (M(x, y), M(z, t)) \in F^2); M(x, y) \times M(z, t) &= \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z & -2t \\ \frac{t}{2} & z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xz - yt & -2(xt + yz) \\ \frac{yz + xt}{2} & -yt + xz \end{pmatrix} = M(xz - yt, xt + yz) \in F \end{aligned}$$

إذن  $F$  جزء مستقر من  $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

(3)  $\varphi$  تطبيق من  $\mathbb{C}^*$  نحو  $F$  بحيث :

(أ) لنبين أن  $\varphi$  تشاكل من  $(\mathbb{C}^*, \times)$  نحو  $(F, \times)$ .

$$\begin{aligned} (\forall ((x, y), (z, t)) \in (\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\})^2); \varphi((x + iy) \times (z + it)) &= \varphi(xz - yt + i(xt + yz)) \\ &= M(xz - yt, xt + yz) \\ &= M(x, y) \times M(z, t) \quad (\text{حسب السؤال 2}) \\ &= \varphi(x + iy) \times \varphi(z + it) \end{aligned}$$

$\varphi$  تشاكل من  $(\mathbb{C}^*, \times)$  نحو  $(F, \times)$

إذن

(ب) نضع  $F^* = F - \{M(0, 0)\}$  لنبين أن  $\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$

$$\varphi(x + iy) = M(0, 0) \Leftrightarrow M(x, y) = M(0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$(x, y) \neq (0, 0) \Leftrightarrow \varphi(x + iy) \neq M(0, 0)$$

$$z \in \mathbb{C}^* \Leftrightarrow \varphi(z) \in F^*$$

و منه

$$\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$$

(ج) لنبين أن  $(F^*, \times)$  زمرة تبادلية

لدينا  $(\mathbb{C}^*, \times)$  زمرة تبادلية و  $\varphi$  تشاكل من  $(\mathbb{C}^*, \times)$  نحو  $(F, \times)$  و  $\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$

$(F^*, \times)$  زمرة تبادلية

إذن

تصحيح الإمتحان الوطني الموحد لمادة الرياضيات شعبة العلوم الرياضية دورة يوليوز 2015

Gassine Mghazli

(4) لنبين أن  $(F, +, \times)$  جسم تبادلي

- بما أن  $F$  فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$  فإن  $(F, +)$  زمرة تبادلية.
- $(F^*, \times)$  زمرة تبادلية
- بما أن  $\times$  توزيعي على  $+$  في  $M_2(\mathbb{R})$  و  $F$  جزء مستقر بالنسبة ل  $\times$  و ل  $+$  فإن  $\times$  توزيعي على  $+$  في  $F$ .

**$(F, +, \times)$  جسم تبادلي**

نستنتج أن

**التمرين الثاني**

$a \in \mathbb{Z} - 1$  لنبين أن  $a \wedge 13 = 1 \Rightarrow a^{2016} \equiv 1[13]$

العدد 13 أولي إذن حسب مبرهنة فرما الصغري لدينا  $a^{13} \equiv a[13]$  و بما أن  $a \wedge 13 = 1$  فإن 13 لا يقسم  $a$  و منه  $a^{12} \equiv 1[13]$

يستلزم  $a^{12} \equiv 1[13]$  و أخيرا نحصل على المطلوب  **$a^{2016} \equiv 1[13]$**

2- نعتبر في  $\mathbb{Z}$  المعادلة  $x^{2015} \equiv 2[13]$  وليكن  $x$  حلا للمعادلة  $(E)$ .

(1) لنبين أن  $x$  و 13 أوليان في ما بينهما

بالخلف نفترض أن 13 يقسم  $x$

$$\begin{cases} 13|x \\ x^{2015} \equiv 2[13] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13|x^{2015} \\ x^{2015} \equiv 2[13] \end{cases} \Rightarrow 13|2$$

و هذا غير ممكن إذن الإفتراض خاطئ و منه 13 لا يقسم  $x$

**$x$  و 13 أوليان في ما بينهما**

نستنتج أن

(2) لنبين أن  $x \equiv 7[13]$

بما أن  $x$  و 13 أوليان في ما بينهما فإن حسب السؤال 1- لدينا  $x^{2016} \equiv 1[13]$

و بما أن  $x^{2015} \equiv 2[13]$  فإن  $x^{2016} \equiv 2x[13]$

نستنتج أن  $2x \equiv 1[13]$  ما يستلزم أن  $14x \equiv 7[13]$  و حيث أن  $14x \equiv x[13]$  فإن  $x \equiv 7[13]$  و هذا هو المطلوب

$$\boxed{x \equiv 7[13]}$$

(3) لنبين أن مجموعة حلول المعادلة  $(E)$  هي  $S = \{7 + 13k / k \in \mathbb{Z}\}$

(4) لدينا  $x^{2015} \equiv 2[13] \Rightarrow x \equiv 7[13]$

لنبين أن  $x^{2015} \equiv 2[13] \Rightarrow x \equiv 7[13]$

لدينا  $x \equiv 7[13] \Rightarrow x^{2015} \equiv 7^{2015}[13] (*)$

تصحيح الإمتحان الوطني الموحد لمادة الرياضيات شعبة العلوم الرياضية دورة يوليوز 2015

Gassine Mghazli

لنحدد باقي قسمة  $7^n$  على 13

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	$n$
1	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	باقي قسمة $7^n$ على 13

$$\begin{cases} 7^{12} \equiv 1[13] \\ 7^{11} \equiv 2[13] \end{cases} \Rightarrow 7^{12 \times 167 + 11} \equiv 2[13] \Rightarrow 7^{2015} \equiv 2[13] \text{ لدينا إذن}$$

$$x \equiv 7[13] \Rightarrow x^{2015} \equiv 2[13] (*)$$

لقد بينا أن المعادلة  $(E)$  تكافئ  $x \equiv 7[13]$

$$x \equiv 7[13] \Leftrightarrow (x - 7 = 13k; k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \in S \text{ و}$$

وبالتالي :

**$S$  هي مجموعة حلول المعادلة  $E$**

$II - 1$ ) ليكن  $n$  هو رقم الكرة المسحوبة

$$\begin{cases} n \in S \\ n \in \{1, 2, \dots, 50\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\exists k \in \mathbb{Z}; n = 7 + 13k) \\ n \in \{1, 2, \dots, 50\} \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{7, 20, 33, 46\} \text{ لدينا}$$

ومنه الاحتمال المطلوب هو  $\frac{4}{50}$ .

**احتمال الحصول على كرة رقمها حلا للمعادلة  $(E)$  هو  $\frac{2}{25}$**

$$2) \text{ ليكن } X \text{ المتغير العشوائي الحداني الذي وسيطاه } n=3 \text{ و } p = \frac{2}{25}$$

الاحتمال المطلوب هو  $p(X=2)$ .

$$p(X=2) = C_3^2 p^2 (1-p) = 3 \times \frac{4}{625} \times \frac{23}{25} = \frac{276}{15625}$$

**احتمال الحصول مرتين بالضبط على كرة رقمها حل للمعادلة  $(E)$  هو  $\frac{276}{15625}$**

**التمرين الثالث**

نعتبر في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(E): z^2 - (1+i)z + 2+2i = 0$

1) أ) لنحسب  $\Delta$  مميز المعادلة  $(E)$

$$\Delta = (1+i)^2 - 4(2+2i) = 2i - 8 - 8i = 1 - 6i - 9 = (1-3i)^2$$

**مميز المعادلة  $(E)$  هو  $(1-3i)^2$**

ب) تحديد حلي المعادلة  $(E)$

$$\text{لدينا } z_1 = \frac{1+i-1+3i}{2} = 2i \text{ و } z_2 = \frac{1+i+1-3i}{2} = 1-i$$

تصحيح الإمتحان الوطني الموحد لمادة الرياضيات شعبة العلوم الرياضية دورة يوليوز 2015

Gassine Mghazli

$$z_1 = 2i \quad \text{و} \quad z_2 = 1-i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \text{ج) لنبين أن}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2i}{1-i} \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

و منه

أ. لنحدد  $e$  لحق  $E$  منتصف القطعة  $[AB]$

$$e = \frac{1+i}{2}$$

$$e = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{1+i}{2} \quad \text{لدينا} \quad \text{و منه}$$

ب.  $r$  الدوران الذي مركزه  $A$  و قياس زاويته  $-\frac{\pi}{2}$

$$r(E) = C \Leftrightarrow c - z_1 = e^{-i\frac{\pi}{2}}(e - z_1) \Leftrightarrow c = -i\left(\frac{1+i}{2} - 2i\right) + 2i \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2} - 2 + 2i \Leftrightarrow c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

ج)  $D$  النقطة ذات اللق  $d = 1 + \frac{3}{2}i$  لنبين أن العدد  $\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right)$  حقيقي .

$$\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) = \frac{1-i-1-\frac{3}{2}i}{-\frac{5}{2}} = i \quad \text{و} \quad \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \frac{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i - 2i}{1-3i} = \frac{1}{2} \frac{-3-i}{-i+3} = \frac{-1}{2}i \quad \text{لدينا}$$

$$\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) = i \times \frac{-i}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{إذن}$$

$$\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \frac{1}{2}$$

التأويل الهندسي:

$$\arg\left(\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right)\right) \equiv \arg\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) + \arg\left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) [2\pi] \quad \text{لدينا}$$

Gassine Mghazli

$$\arg\left(\frac{z_2-d}{c-d}\right) + \arg\left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right) \equiv \overline{(DC, DB)} + \overline{(AB, AC)}[2\pi] \text{ و}$$

$$\overline{(DC, DB)} + \overline{(AB, AC)} \equiv [2\pi] \text{ فإن } \arg\left(\frac{1}{2}\right) \equiv 0[2\pi] \text{ و بما أن}$$

$$\overline{(DC, DB)} \equiv \overline{(AC, AB)}[2\pi] \text{ نستنتج أن}$$

$$\overline{(DC, DB)} \equiv \overline{(AC, AB)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ إذن } \left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right) = -\frac{i}{2} \text{ و } \left(\frac{z_2-d}{c-d}\right) = i \text{ و حسب ما سبق}$$

نستنتج أن

النقط A B C و D متداورة و تنتمي إلى الدائرة ذات القطر [BC]

التمرين الرابع

$$n \in \mathbb{N}^*; \forall x \in \mathbb{R}; f_n(x) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$$

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)}} = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{3}{2}(x-n)} = 0 \text{ و منه ل } (C_n) \text{ مقارب عند } +\infty \text{ معادلته } y = 1$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)}} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{3}{2}(x-n)} = +\infty \text{ و منه ل } (C_n) \text{ مقارب عند } -\infty \text{ معادلته } y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0$$

$$\text{ل } (C_n) \text{ مقارب عند } +\infty \text{ معادلته } y = 1 \text{ و } (C_n) \text{ مقارب عند } -\infty \text{ معادلته } y = 0$$

(ب) لنبين أن  $f_n$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$

الدالة  $x \rightarrow e^{-\frac{3}{2}(x-n)}$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  إذن الدالة  $x \rightarrow 1 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)}$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$

و بما أن  $\forall x \in \mathbb{R}; 1 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)} \neq 0$  فإن

الدالة  $f_n$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$

Gassine Mghazli

حساب  $f'_n(x)$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f'_n(x) = \frac{3}{2} \frac{e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}{\left(1 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)^2}$$

$$\mathbb{R} \text{ تزايدية قطعا على } f_n \text{ إذن } (\forall x \in \mathbb{R}); f'_n(x) > 0$$

(ج)

(2) أ) لنبين أن النقطة  $I_n\left(n, \frac{1}{2}\right)$  مركز تماثل للمنحنى  $(C_n)$

لدينا  $\forall x \in \mathbb{R}; 2n - x \in \mathbb{R}$

$$f_n(2n - x) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{3}{2}(2n-x-n)}} = \frac{1}{1 + e^{-\frac{3}{2}(n-x)}} = \frac{e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}{e^{-\frac{3}{2}(x-n)} + 1} = 1 - \frac{1}{1 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)}} = 1 - f_n(x) \text{ و}$$

$$\text{النقطة } I_n\left(n, \frac{1}{2}\right) \text{ مركز تماثل للمنحنى } (C_n)$$

نستنتج أن

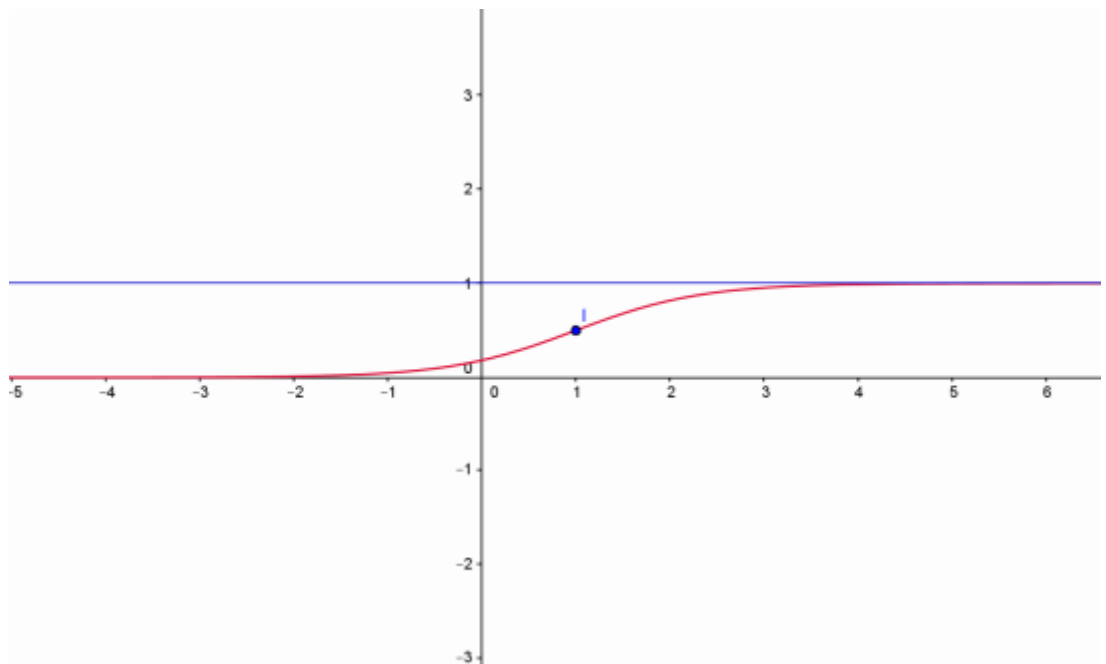
(ب) إنشاء  $(C_1)$

جدول تغيرات الدالة  $f_1$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f_1(x)$	0	1

Gassine Mghazli

مبيان  $f_1$



(ج) حساب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحني  $(C_1)$  والمستقيمتين التي معادلاتها على التوالي  $x=0$  و  $x=1$  و  $y=0$

$$\int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + e^{-\frac{3}{2}(x-1)}} dx = \int_0^1 \frac{e^{\frac{3}{2}(x-1)}}{1 + e^{\frac{3}{2}(x-1)}} dx = \left[ \ln \left( 1 + e^{\frac{3}{2}(x-1)} \right) \right]_0^1 = \ln 2 - \ln \left( 1 + e^{-\frac{3}{2}} \right) = \ln \left( \frac{2}{1 + e^{-\frac{3}{2}}} \right)$$
 لدينا

$$\|i\| \times \|j\| \times \ln \left( \frac{2}{1 + e^{-\frac{3}{2}}} \right)$$
 المساحة المطلوبة هي

و منه

(2) أ)  $n \in \mathbb{N}^*$  لنبين أن المعادلة  $f_n(x) = x$  تقبل حلا وحيدا  $u_n$  في المجال  $]0, n[$

نضع  $\varphi_n(x) = f_n(x) - x$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); \varphi_n'(x) = \frac{3}{2} \frac{e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}{\left(1 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)^2} - 1 = -\frac{2 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)} + 2e^{-3(x-n)}}{2\left(1 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)^2} < 0 \text{ و } \mathbb{R} \text{ قابلة للإشتقاق على}$$

$\varphi_n$  متصلة و تناقصية فقطعا على  $\mathbb{R}$  إذن  $\varphi_n$  تقابل من  $\mathbb{R}$  نحو  $\mathbb{R}$

$$\varphi_n(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_n(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_n(x) \right[ = ]-\infty, +\infty[ \text{ و}$$

نستنتج أن المعادلة  $\varphi_n(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $u_n$  و بما أن  $\varphi_n(0) = f_n(0) > 0$  و  $\varphi_n(n) = f_n(n) - n = \frac{1}{2} - n < 0$



تصحيح الإمتحان الوطني الموحد لمادة الرياضيات شعبة العلوم الرياضية دورة يوليوز 2015

Gassine Mghazli

فإن ( حسب مبرهنة القيم الوسطية )  $u_n \in ]0, n[$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \exists ! u_n \in ]0, n[ / f_n(u_n) = u_n$$

(ب) لدينا :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall x \in \mathbb{R}) f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n-1)}} - \frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$$

$$= \frac{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)} - 1 - e^{-\frac{3}{2}(x-n-1)}}{\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n-1)}\right)} = \frac{e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\left(1-e^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n-1)}\right)} < 0$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall x \in \mathbb{R}) f_{n+1}(x) < f_n(x)$$

إذن

(ج) لنبين أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  تناقصية قطعاً ثم لنستنتج أنها متقاربة

لدينا :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall x \in \mathbb{R}) : f_{n+1}(x) < f_n(x) \Rightarrow f_{n+1}(x) - x < f_n(x) - x$

$$\Rightarrow \varphi_{n+1}(x) < \varphi_n(x)$$

$$\Rightarrow \varphi_{n+1}(u_{n+1}) < \varphi_n(u_{n+1})$$

$$\Rightarrow \varphi_n(u_n) < \varphi_n(u_{n+1}) \quad (\text{لأن } \varphi_{n+1}(u_{n+1}) = \varphi_n(u_{n+1}) = 0)$$

و بما أن الدالة  $\varphi_n$  تناقصية قطعاً على  $\mathbb{R}$  فإن  $u_n > u_{n+1}$   $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

نستنتج أن : المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  تناقصية قطعاً

$$\text{المتتالية } (u_n)_{n \geq 1} \text{ تناقصية قطعاً}$$

إستنتاج : بما أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  تناقصية قطعاً و مصغرة ب 0 فإنها متقاربة

$$\text{المتتالية } (u_n)_{n \geq 1} \text{ متقاربة}$$

(د) لنحسب نهاية المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$

المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  متقاربة والدالة  $f_n$  متصلة على المجال  $]0, n[$  و تحقق  $]0, n[ \subset ]0, n[$   $f_n(0), \frac{1}{2} \subset ]0, n[$   $f_n(0), \frac{1}{2} \subset ]0, n[$

إذن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  تقبل نهاية  $l$  تحقق  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(l) = l$  ولدينا  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(l-n)}} = 0$  نستنتج أن  $l = 0$

Gassine Mghazli

$$\lim u_n = 0$$

التمرين الخامس

نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  ب  $g(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$

(1) لنبين أن الدالة  $g$  زوجية

$$\forall x \in \mathbb{R}^*; -x \in \mathbb{R}^* \text{ و } g(-x) = \int_{-x}^{-3x} \frac{\cos t}{t} dt \stackrel{t=-u}{=} \int_x^{3x} \frac{\cos(-u)}{-u} (-du) = \int_x^{3x} \frac{\cos u}{u} du = g(x)$$

الدالة  $g$  زوجية

نستنتج أن

(2) الدالة  $t \rightarrow \frac{\cos t}{t}$  متصلة على  $]0, +\infty[$  إذن تقبل دالة أصلية  $\varphi$  على هذا المجال

$$g(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = [\varphi(t)]_x^{3x} = \varphi(3x) - \varphi(x) \text{ لدينا}$$

بما أن الدالة  $\varphi$  قابلة للإشتقاق (أصلية) على  $]0, +\infty[$  فإن الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على  $]0, +\infty[$  ولدينا :

$$(\forall x > 0); g'(x) = 3\varphi'(3x) - \varphi'(x) = 3 \frac{\cos 3x}{3x} - \frac{\cos x}{x} = \frac{\cos 3x - \cos x}{x}$$

$$(\forall x > 0); g'(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{x}$$

$$\forall x > 0; \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \quad (3) \text{ أ) لنتحقق من أن}$$

$$\forall x > 0; \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \left[ \frac{\sin t}{t} \right]_x^{3x} - \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt = \frac{\sin 3x}{3x} - \frac{\sin x}{x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt = \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \text{ لدينا}$$

إذن

$$\forall x > 0; \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

(ب) لنبين أن  $(\forall x > 0); |g(x)| < \frac{2}{x}$

$$(\forall x > 0); |g(x)| < \left| \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt \right| \leq \left| \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{3x} \right| + \left| \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \right| \leq \frac{4}{3x} + \int_x^{3x} \frac{1}{t^2} dt \text{ لدينا}$$

تصحيح الإمتحان الوطني الموحد لمادة الرياضيات شعبة العلوم الرياضية دورة يوليوز 2015

Gassine Mghazli

$$(\forall x > 0); x \leq t \leq 3x \Rightarrow \frac{1}{3x} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_x^{3x} \frac{1}{t^2} dt \leq \int_x^{3x} \frac{1}{x^2} dt \text{ و لدينا}$$

$$\int_x^{3x} \frac{1}{x^2} dt = \left[ -\frac{1}{x} \right]_x^{3x} = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{3x} \text{ و}$$

$$\text{نستنتج أن } (\forall x > 0); |g(x)| < \frac{4}{3x} + \frac{2}{3x}$$

$$(\forall x > 0); |g(x)| < \frac{2}{x}$$

$$(4) \text{ أ) لنبين أن } (\forall x > 0); 0 \leq \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt \leq 2x$$

$$\text{لدينا } (\forall t > 0); 1 - \cos t \leq t \Rightarrow \frac{1 - \cos t}{t} \leq 1 \Rightarrow \int_x^{3x} \frac{1 - \cos t}{t} dt \leq \int_x^{3x} 1 dt$$

$$\text{و لدينا } \int_x^{3x} 1 dt = 2x \text{ نستنتج أن :}$$

$$(\forall x > 0); 0 \leq \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt \leq 2x$$

$$(ب) \text{ لنتحقق أن } (\forall x > 0); g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$$

$$\text{لدينا } (\forall x > 0); \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt = g(x) - \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt = g(x) - [\ln t]_x^{3x} = g(x) - (\ln 3x - \ln x) = g(x) - \ln 3$$

و منه

$$(\forall x > 0); \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt = g(x) - \ln 3$$

$$(ج) \text{ لدينا } (\forall x > 0); 0 \leq \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt \leq 2x \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt = 0 \text{ و بما أن } (\forall x > 0); g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$$

$$\text{فإن } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) - \ln 3 = 0 \text{ و بالتالي}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \ln 3$$

إنتهى