

Gassine Mghazli

التمرين الأول

الجزء الأول

$\forall \in (x, y) \in \mathbb{R}^2; x * y = x + y - e^{xy} + 1$: \mathbb{R} مزود بالقانون * المعرف كما يلي :

(1) لنبين أن القانون * تبادلي.

$\forall \in (x, y) \in \mathbb{R}^2; x * y = x + y - e^{xy} + 1 = y + x - e^{yx} + 1 = y * x$

لدينا $\forall \in (x, y) \in \mathbb{R}^2; x * y = y * x$

القانون * تبادلي

(ب) لنبين أن القانون * يقبل عنصرا محابيا نحده.

ليكن y من \mathbb{R}

$(\forall x \in \mathbb{R}; x * y = x) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}; x + y - e^{xy} + 1 = x) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}; y + 1 = e^{xy}) \Leftrightarrow (y = 0)$

و بما أن * تبادلي فإن $\forall x \in \mathbb{R}; x * 0 = 0 * x = x$

0 هو العنصر المحابي للقانون *

(2) لنبين أن القانون * غير تجميعي

لدينا α و β حللين مختلفين للمعادلة $3 + \alpha - e^{-2\alpha} = 3 + \beta - e^{-2\beta} = 0$ يعني $3 + x - e^{2x} = 0$

$\alpha * (2 * \beta) = \alpha * 0 = \alpha$ و $(\alpha * 2) * \beta = 0 * \beta = \beta$ يعني $\alpha * 2 = \beta * 2 = 0$

و بما أن $\alpha \neq \beta$ فإن $\alpha * (2 * \beta) \neq (\alpha * 2) * \beta$

القانون * غير تجميعي

نستنتج ان

الجزء الثاني

$M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$ مع $F = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

(1) لنبين أن F فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$

$(I = M(1, 0) \in F)$ و $F \neq \emptyset$ لأن $F \subset M_2(\mathbb{R})$

$\forall (M(x, y), M(z, t)) \in F^2$ و $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

تصحيح الإمتحان الوطني الموحد لمادة الرياضيات شعبة العلوم الرياضية دورة يوليو 2015

Yassine Mghazli

لدينا

$$\alpha M(x, y) + \beta M(z, t) = \begin{pmatrix} \alpha x & -2\alpha y \\ \frac{\alpha y}{2} & \alpha x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta z & -2\beta t \\ \frac{\beta t}{2} & \beta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta z & -2(\alpha y + \beta t) \\ \frac{\alpha y + \beta t}{2} & \alpha x + \beta z \end{pmatrix} = M(\alpha x + \beta z, \alpha y + \beta t)$$

إذن $\alpha M(x, y) + \beta M(z, t) \in F$ نستنتج أن :

$(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجمي جزئي للفضاء المتجمي الحقيقي F

(2) لنبين أن F جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

$$\begin{aligned} (\forall (M(x, y), M(z, t)) \in F^2); M(x, y) \times M(z, t) &= \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z & -2t \\ \frac{t}{2} & z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xz - yt & -2(xt + yz) \\ \frac{yz + xt}{2} & -yt + xz \end{pmatrix} = M(xz - yt, xt + yz) \in F \end{aligned}$$

إذن F جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

(3) φ تطبيق من \mathbb{C}^* نحو F بحيث :

(أ) لنبين أن φ تشكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (F, \times)

$$\begin{aligned} (\forall ((x, y), (z, t)) \in (\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\})^2); \varphi((x+iy) \times (z+it)) &= \varphi(xz - yt + i(xt + yz)) \\ &= M(xz - yt, xt + yz) \\ (\text{حسب السؤال (2)}) &= M(x, y) \times M(z, t) \\ &= \varphi(x+iy) \times \varphi(z+it) \end{aligned}$$

φ تشكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (F, \times)

إذن

(ب) نضع $\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$ لنبين أن $F^* = F - \{M(0, 0)\}$

$\varphi(x+iy) = M(0, 0) \Leftrightarrow M(x, y) = M(0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$

يعني $(x, y) \neq (0, 0) \Leftrightarrow \varphi(x+iy) \neq M(0, 0)$

يعني $z \in \mathbb{C}^* \Leftrightarrow \varphi(z) \in F^*$

$\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$

و منه

(ج) لنبين أن (F^*, \times) زمرة تبادلية

لدينا $\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$ زمرة تبادلية و φ تشكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (F, \times) .

(F^*, \times) زمرة تبادلية

إذن

تصحيح الإمتحان الوطني الموحد لمادة الرياضيات شعبة العلوم الرياضية دورة يوليوز 2015

Gassine Mghazli

- لنبين أن $(F, +, \times)$ جسم تبادلي (4)
- بما أن F فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فان $(F, +, \cdot)$ زمرة تبادلية.
- بما أن \times توزيعي على $+$ في $M_2(\mathbb{R})$ و F جزء مستقر بالنسبة ل \times ول $+$ فإن \times توزيعي على $+$ في F .

(F, +, ×) جسم تبادلي

نستنتج أن

التمرين الثاني

$$a \wedge 13 = 1 \Rightarrow a^{2016} \equiv 1[13] \quad a \in \mathbb{Z} \quad -1 - I$$

العدد 13 أولي إذن حسب مبرهنة فرما الصغرى لدينا $a^{12} \equiv 1[13]$ و بما ان $a^{13} \equiv a[13]$ فإن 13 لا يقسم a و منه

$$a^{2016} \equiv 1[13] \quad \text{و أخيرا نحصل على المطلوب}$$

2- نعتبر في \mathbb{Z} المعادلة $(E): x^{2015} \equiv 2[13]$ وليكن x حل للمعادلة

لنبين أن x و 13 أوليان في ما بينهما (1)

بالخلاف نفترض أن 13 يقسم x

$$\begin{cases} 13|x \\ x^{2015} \equiv 2[13] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13|x^{2015} \\ x^{2015} \equiv 2[13] \end{cases} \Rightarrow 13|2$$

و هذا غير ممكن إذن الإفراض خاطئ و منه 13 لا يقسم x

x و 13 أوليان في ما بينهما

نستنتج أن

$$x \equiv 7[13] \quad \text{لنبين أن } x \equiv 7[13] \quad (2)$$

بما أن x و 13 أوليان في ما بينهما فإن حسب السؤال 1- لدينا

$$x^{2016} \equiv 2x[13] \quad \text{فإن } x^{2015} \equiv 2[13]$$

نستنتج أن $2x \equiv 1[13]$ ما يستلزم أن $x \equiv 7[13]$ و حيث أن $14x \equiv 7[13]$ فإن $14x \equiv 7[13]$ و هذا هو المطلوب

$$x \equiv 7[13]$$

3- لنبين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي $S = \{7 + 13k / k \in \mathbb{Z}\}$

$$x^{2015} \equiv 2[13] \Rightarrow x \equiv 7[13] \quad \text{لدينا } (4)$$

لنبين أن $x \equiv 7[13] \Rightarrow x^{2015} \equiv 2[13]$

$$x \equiv 7[13] \Rightarrow x^{2015} \equiv 7^{2015}[13] \quad \text{لدينا } (*)$$

تصحيح الإمتحان الوطني الموحد لمادة الرياضيات شعبة العلوم الرياضية دورة يوليوز 2015

Yassine Mghazli

لنحدد باقي قسمة 7^n على 13

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	n
1	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	باقي قسمة 7^n على 13

$$\begin{cases} 7^{12} \equiv 1[13] \\ 7^{11} \equiv 2[13] \end{cases} \Rightarrow 7^{12 \times 167 + 11} \equiv 2[13] \Rightarrow 7^{2015} \equiv 2[13]$$

(*) تصبح $x \equiv 7[13] \Rightarrow x^{2015} \equiv 2[13]$

لقد بينا أن المعادلة (E) تكافئ

$$x \equiv 7[13] \Leftrightarrow (x - 7 = 13k; k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \in S$$

و بالتالي :

S هي مجموعة حلول المعادلة E

(1) - II لتكن n هو رقم الكرة المسحوبة

$$\begin{cases} n \in S \\ n \in \{1, 2, \dots, 50\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\exists k \in \mathbb{Z}; n = 7 + 13k) \\ n \in \{1, 2, \dots, 50\} \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{7, 20, 33, 46\}$$

و منه الاحتمال المطلوب هو $\frac{4}{50}$

احتمال الحصول على كرة رقمها حل للمعادلة (E) هو $\frac{2}{25}$

$$(2) \text{ لتكن } X \text{ المتغير العشوائي الحداني الذي وسيطاه } n = 3 \text{ و } p = \frac{2}{25}$$

الاحتمال المطلوب هو $p(X = 2)$

$$p(X = 2) = C_3^2 p^2 (1-p) = 3 \times \frac{4}{625} \times \frac{23}{25} = \frac{276}{15625}$$

احتمال الحصول مرتين بالضبط على كرة رقمها حل للمعادلة (E) هو $\frac{276}{15625}$

التمرين الثالث

نعتبر في \mathbb{C} المعادلة $(E): z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$

(1) أ) لنحسب Δ مميز المعادلة (E)

$$\Delta = (1+i)^2 - 4(2+2i) = 2i - 8 - 8i = 1 - 6i - 9 = (1-3i)^2$$

مميز المعادلة (E) هو $(1-3i)^2$

(ب) تحديد حل المعادلة (E)

$$z_2 = \frac{1+i+1-3i}{2} = 1-i \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{1+i-1+3i}{2} = 2i$$

Gassine Mghazli

$$z_1 = 2i \quad \text{و} \quad z_2 = 1 - i$$

ج) لتبين أن $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2i}{1-i} \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

و منه

أ. لتحديد e لحق E منتصف القطعة $[AB]$

$$e = \frac{1+i}{2}$$

$$e = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{1+i}{2}$$

ب. r الدوران الذي مر عليه A و قياس زاويته $\frac{-\pi}{2}$

$$r(E) = C \Leftrightarrow c - z_1 = e^{-i\frac{\pi}{2}}(e - z_1) \Leftrightarrow c = -i\left(\frac{1+i}{2} - 2i\right) + 2i \Leftrightarrow c = \frac{-1}{2}i + \frac{1}{2} - 2 + 2i \Leftrightarrow c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

ج) النقطة ذات اللحق D $d = 1 + \frac{3}{2}i$ لتبين أن العدد d حقيقي.

$$\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) = \frac{1 - i - 1 - \frac{3}{2}i}{-\frac{5}{2}} = i \quad \text{و} \quad \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \frac{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i - 2i}{1 - 3i} = \frac{1}{2} \frac{-3 - i}{i(-i + 3)} = \frac{-1}{2}i$$

$$\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) = i \times \frac{-i}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \frac{1}{2}$$

التأويل الهندسي:

$$\arg\left(\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right)\right) \equiv \arg\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) + \arg\left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right)[2\pi]$$

Gassine Mghazli

$$\arg\left(\frac{z_2-d}{c-d}\right) + \arg\left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right) \equiv \overline{(DC, DB)} + \overline{(AB, AC)}[2\pi]$$

$$\overline{(DC, DB)} + \overline{(AB, AC)} \equiv [2\pi] \text{ فان } \arg\left(\frac{1}{2}\right) \equiv 0[2\pi]$$

$$\text{نستنتج أن } \overline{(DC, DB)} \equiv \overline{(AC, AB)}[2\pi]$$

$$\overline{(DC, DB)} \equiv \overline{(AC, AB)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ إذن } \left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right) = -\frac{i}{2} \text{ و } \left(\frac{z_2-d}{c-d}\right) = i \text{ و حسب ما سبق}$$

نستنتج أن

النقط A B C D متداورة و تنتمي إلى الدائرة ذات القطر $[BC]$

التمرين الرابع

$$n \in \mathbb{N}^*; \forall x \in \mathbb{R}; f_n(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{-3(x-n)}{2}}}$$

$$y=1 \text{ و منه } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-3(x-n)}{2}} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{\frac{-3(x-n)}{2}}} = 1 \quad (1)$$

$$y=0 \text{ و منه } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{-3(x-n)}{2}} = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^{\frac{-3(x-n)}{2}}} = 0 \text{ معادلته}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0$$

$$y=0 \text{ مقارب عند } +\infty \text{ معادلته } y=1 \text{ و } y=1 \text{ مقارب عند } -\infty \text{ معادلته } (C_n)$$

ب) لنبين أن f_n قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}

الدالة $x \rightarrow 1 + e^{\frac{-3(x-n)}{2}}$ قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} إذن الدالة $x \rightarrow f_n(x)$ قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} و بما أن $\forall x \in \mathbb{R}; 1 + e^{\frac{-3(x-n)}{2}} \neq 0$ فان

الدالة f_n قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}

Gassine Mghazli

حساب $f_n'(x)$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f_n'(x) = \frac{3}{2} \frac{e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}{\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)^2}$$

(ج) $\forall x \in \mathbb{R}$ إذن f_n تزايدية قطعا على

لدينا

(ج) لنبين أن النقطة $I_n\left(n, \frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى (C_n)

$\forall x \in \mathbb{R}; 2n-x \in \mathbb{R}$ لدينا

$$f_n(2n-x) = \frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(2n-x-n)}} = \frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(n-x)}} = \frac{e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}{e^{-\frac{3}{2}(x-n)} + 1} = 1 - \frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}} = 1 - f_n(x)$$

نستنتج أن $I_n\left(n, \frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى (C_n)

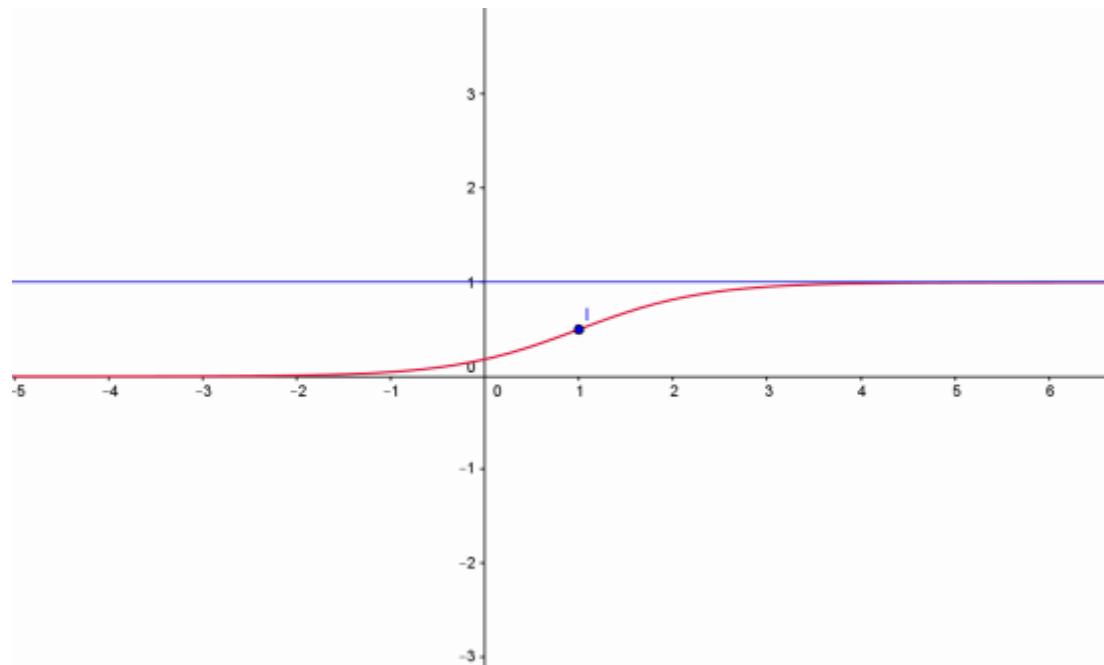
(ج) إنشاء (C_1)

جدول تغيرات الدالة f_1

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_1(x)$	0	↗ 1

Gassine Mghazli

مبيان f_1



ج) حساب مساحة الحيز المستوي المحدود بين المنحني (C_1) و المستقيمات التي معادلاتها على التوالي $x=0$ و $x=1$ و $y=0$

$$\int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + e^{\frac{3}{2}(x-1)}} dx = \int_0^1 \frac{e^{\frac{3}{2}(x-1)}}{1 + e^{\frac{3}{2}(x-1)}} dx = \left[\ln \left(1 + e^{\frac{3}{2}(x-1)} \right) \right]_0^1 = \ln 2 - \ln \left(1 + e^{\frac{3}{2}} \right) = \ln \left(\frac{2}{1 + e^{\frac{3}{2}}} \right)$$

لدينا

المساحة المطلوبة هي

$$\|i\| \times \|j\| \times \ln \left(\frac{2}{1 + e^{\frac{3}{2}}} \right)$$

و منه

(2) لنبين أن المعادلة $f_n(x) = x$ تقبل حلاً وحيداً u_n في المجال $[0, n]$

$$\text{نضع } f_n(x) = f_n(x) - x$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); \varphi_n(x) = \frac{3}{2} \frac{e^{\frac{3}{2}(x-n)}}{\left(1 + e^{\frac{3}{2}(x-n)}\right)^2} - 1 = -\frac{2 + e^{\frac{3}{2}(x-n)} + 2e^{-3(x-n)}}{2 \left(1 + e^{\frac{3}{2}(x-n)}\right)^2} < 0$$

قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} و φ_n

$\varphi_n(\mathbb{R})$ متصلة و تناقصية فقطعا على \mathbb{R} إذن φ_n تقابل من \mathbb{R} نحو

$$\varphi_n(\mathbb{R}) = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_n(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_n(x) \right] = [-\infty, +\infty]$$

نستنتج أن المعادلة $\varphi_n(n) = f_n(n) - n = \frac{1}{2} - n < 0$ و $\varphi_n(0) = f_n(0) > 0$ و بما أن $\varphi_n(x) = f_n(x) - x$ تقبل حلاً وحيداً u_n و بما أن $0 < u_n < n$

تصحيح الإمتحان الوطني الموحد لمادة الرياضيات شعبة العلوم الرياضية دورة يوليوز 2015

Yassine Mghazli

فإن (حسب مبرهنة القيم الوسطية)

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \exists u_n \in]0, n[/ f_n(u_n) = u_n$$

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall x \in \mathbb{R}) f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-n-1)}} - \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}} \\ &= \frac{1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)} - 1 - e^{\frac{-3}{2}(x-n-1)}}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n-1)}\right)} = \frac{e^{\frac{-3}{2}(x-n)} \left(1 - e^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n-1)}\right)} < 0 \end{aligned}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall x \in \mathbb{R}) f_{n+1}(x) < f_n(x) \quad \text{إذن}$$

ج) لنبين أن المتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ تناقصية قطعا ثم لنتنصلج أنها متقاربة

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall x \in \mathbb{R}) : f_{n+1}(x) < f_n(x) \Rightarrow f_{n+1}(x) - x < f_n(x) - x \quad \text{لدينا}$$

$$\Rightarrow \varphi_{n+1}(x) < \varphi_n(x)$$

$$\Rightarrow \varphi_{n+1}(u_{n+1}) < \varphi_n(u_{n+1})$$

$$\Rightarrow \varphi_n(u_n) < \varphi_n(u_{n+1}) \quad (\varphi_{n+1}(u_{n+1}) = \varphi_n(u_n) = 0) \quad \text{(لأن)}$$

و بما أن الدالة φ_n تناقصية قطعا على \mathbb{R} فإن $u_n > u_{n+1}$

نستنتج أن : المتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ تناقصية قطعا

$$\boxed{\text{المتالية } (u_n)_{n \geq 1} \text{ تناقصية قطعا}}$$

إستنتاج : بما أن المتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ تناقصية قطعا و مصغورة ب 0 فإنها متقاربة

$$\boxed{\text{المتالية } (u_n)_{n \geq 1} \text{ متقاربة}}$$

د) لنحسب نهاية المتالية $(u_n)_{n \geq 1}$

المتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة والدالة f_n متصلة على المجال $[0, n]$ و تتحقق أن

إذن المتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ تقبل نهاية l تتحقق $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(l) = l$ و لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(l) = l$ نستنتج أن

Gassine Mghazli

$$\lim u_n = 0$$

التمرين الخامس

نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R}^* ب

(1) لتبين أن الدالة g زوجية

$$\forall x \in \mathbb{R}^*; -x \in \mathbb{R}^* \quad g(-x) = \int_{-x}^{-3x} \frac{\cos t}{t} dt = \int_x^{3x} \frac{\cos(-u)}{-u} (-du) = \int_x^{3x} \frac{\cos u}{u} du = g(x)$$

الدالة g زوجية

نستنتج أن

(2) الدالة $t \rightarrow \frac{\cos t}{t}$ متصلة على $[0, +\infty]$ إذن تقبل دالة أصلية φ على هذا المجال

$$g(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = [\varphi(t)]_x^{3x} = \varphi(3x) - \varphi(x)$$

بما أن الدالة φ قابلة للإشتقاق (أصلية) على $[0, +\infty]$ و لدينا :

$$(\forall x > 0); g'(x) = 3\varphi'(3x) - \varphi'(x) = 3 \frac{\cos 3x}{3x} - \frac{\cos x}{x} = \frac{\cos 3x - \cos x}{x}$$

$$(\forall x > 0); g'(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{x}$$

$$\forall x > 0; \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \quad (3)$$

$$\forall x > 0; \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \left[\frac{\sin t}{t} \right]_x^{3x} - \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt = \frac{\sin 3x}{3x} - \frac{\sin x}{x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt = \frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

لدينا إذن

$$\forall x > 0; \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

(ب) لتبين أن $(\forall x > 0); |g(x)| < \frac{2}{x}$

$$(\forall x > 0); |g(x)| < \left| \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt \right| \leq \left| \frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x} \right| + \left| \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \right| \leq \frac{4}{3x} + \int_x^{3x} \frac{1}{t^2} dt$$

Yassine Mghazli

$$(\forall x > 0); x \leq t \leq 3x \Rightarrow \frac{1}{3x} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_x^{3x} \frac{1}{t^2} dt \leq \int_x^{3x} \frac{1}{x^2} dt$$

$$\int_x^{3x} \frac{1}{x^2} dt = \left[-\frac{1}{x} \right]_x^{3x} = \frac{-1}{3x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{3x}$$

نستنتج أن $(\forall x > 0); |g(x)| < \frac{4}{3x} + \frac{2}{3x}$ وبالتالي :

$$(\forall x > 0); |g(x)| < \frac{2}{x}$$

$$(\forall x > 0); 0 \leq \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt \leq 2x \quad (4)$$

$$(\forall t > 0); 1 - \cos t \leq t \Rightarrow \frac{1 - \cos t}{t} \leq 1 \Rightarrow \int_x^{3x} \frac{1 - \cos t}{t} dt \leq \int_x^{3x} dt$$

لدينا $\int_x^{3x} dt = 2x$ و نستنتج أن :

$$(\forall x > 0); 0 \leq \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt \leq 2x$$

$$(\forall x > 0); g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$$

$$(\forall x > 0); \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt = g(x) - \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt = g(x) - [\ln t]_x^{3x} = g(x) - (\ln 3x - \ln x) = g(x) - \ln 3$$

لدينا و منه

$$(\forall x > 0); \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt = g(x) - \ln 3$$

$$(\forall x > 0); g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt \quad \text{و بما أن } \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt = 0 \quad \text{إذن } (\forall x > 0); 0 \leq \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt \leq 2x$$

فإن $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) - \ln 3 = 0$ وبالتالي

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \ln 3$$

إنتهى