هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	تصحيح الامتحان الوطني 2015 الدورة العادية	امتحانات وطنية

تمرين 1 :

$$(E):\ z^2-\left(5+i\sqrt{3}\right)z+4+4i\sqrt{3}=0$$

1

أ) $\Delta=\left(5+i\sqrt{3}\right)^2-4\left(4+4i\sqrt{3}\right)=25+10i\sqrt{3}-3-16-16i\sqrt{3}=6-6i\sqrt{3}=9-6i\sqrt{3}-3=\left(3-i\sqrt{3}\right)^2$

ب) $a=\dfrac{5+i\sqrt{3}-3+i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$ ، $b=\dfrac{5+i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}{2}=4$

ج) لدينا : $a\left(1-i\sqrt{3}\right)=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)=1+3=4=b$ إذن : $b=\left(1-i\sqrt{3}\right)a$

2

أ) الصيغة العقدية للدوران $R\left(A,\dfrac{®}{2}\right)$ هي : $z'=e^{\frac{®}{2}i}(z-a)+a=i(z-a)+a$ ، بما أن $B_1=R(O)$ فإن :

$b_1=i(0-a)+a=-i\,a+a=-i\left(1+i\sqrt{3}\right)+1+i\sqrt{3}=-i-\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}=1-\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}-1\right)$

ب) الصيغة العقدية للتحاكي h هي : $z'=k(z-a)+a=\sqrt{3}(z-a)+a$

لتكن $B_1'=R(B_1)$ إذن : $b_1'=\sqrt{3}(b_1-a)+a=\sqrt{3}(-i\,a)+a=a\left(1-i\sqrt{3}\right)=b$

إذن $B_1'=B$ منه : $B=R(B_1)$

ج) لدينا : $\dfrac{b}{b-a}=\dfrac{b}{a-i\sqrt{3}a-a}=\dfrac{b}{-a\sqrt{3}i}=\dfrac{\frac{b}{a}}{-\sqrt{3}i}=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}i}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{-i}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{e^{\frac{-®}{3}i}}{e^{\frac{-®}{2}i}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{®}{6}i}$

بالتالي : $\arg\left(\dfrac{b}{b-a}\right)\equiv\dfrac{®}{6}[2®]$

د) بما أن C تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OAB فإن النقط O و A و B و C متداورة

منه : $\dfrac{c-0}{c-a}\div\dfrac{b-0}{b-a}\in IR$ منه : $\arg\left(\dfrac{c-0}{c-a}\div\dfrac{b-0}{b-a}\right)\equiv 0[®]$ منه : $\arg\left(\dfrac{c}{c-a}\right)-\arg\left(\dfrac{b}{b-a}\right)\equiv 0[®]$

منه : $\arg\left(\dfrac{c}{c-a}\right)\equiv\dfrac{®}{6}[®]$

تمرين 2 : $x^{1439}\equiv 1436[2015]$

1 بما أن : $1436\times 1051-2015\times 749=1$ فحسب مبرهنة بيزو «Bezout» فإن : $1436\wedge 2015=1$

2

أ) لدينا : $x^{1439}\equiv 1436[2015]$ إذن : $\exists k\in Z\ /\ x^{1439}-2015k=1436$

لدينا d/x و $d/2015$ منه: d/x^{1436} و $d/2015k$ منه : $d/x^{1439}-2015k$ بالتالي : $d/1436$

ب) نضع : $x\wedge 2015=d$ ، إذن d/x و $d/2015$ إذن حسب السؤال السابق : $d/1436$

إذن : $d/1436\times 1051$ و لدينا : $d/2015$ إذن : $d/2015\times 749$ إذن : $d/1436\times 1051-2015\times 749$

منه : $d/1$ ، و بما أن : $d>0$ فإن : $d=1$ ، بالتالي : $x\wedge 2015=1$

3 أ) لدينا : $2015=5\times 13\times 31$ ، بما أن : $x\wedge 2015=1$ فإن : $x\wedge(5\times 13\times 31)=1$ إذن :

$$\begin{cases} x\wedge 5=1\\ x\wedge 13=1\\ x\wedge 31=1\end{cases}$$

إذن حسب مبرهنة فيرما نستنتج أن : $\begin{cases} x^4\equiv 1[5]\\ x^{12}\equiv 1[13]\\ x^{30}\equiv 1[31]\end{cases}$ منه : $\begin{cases} \left(x^4\right)^{360}\equiv 1[5]\\ \left(x^{12}\right)^{120}\equiv 1[13]\\ \left(x^{30}\right)^{48}\equiv 1[31]\end{cases}$ بالتالي : $\begin{cases} x^{1404}\equiv 1[5]\\ x^{1404}\equiv 1[13]\\ x^{1404}\equiv 1[31]\end{cases}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

	ب)	لدينا : $\begin{cases} x^{1404}\equiv 1[5] \\ x^{1404}\equiv 1[13] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 5/x^{1404}-1 \\ 13/x^{1404}-1 \end{cases}$ منه : $(5\vee 13)/x^{1404}-1$ أي : $65/x^{1404}-1$ أي : $x^{1404}\equiv 1[65]$ مرة أخرى لدينا : $\begin{cases} x^{1404}\equiv 1[65] \\ x^{1404}\equiv 1[31] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 65/x^{1404}-1 \\ 31/x^{1404}-1 \end{cases}$ منه : $(65\vee 31)/x^{1404}-1$ أي : $2015/x^{1404}-1$ أي : $x^{1404}\equiv 1[2015]$
4		لدينا : $x^{1439}\equiv 1436[2015]$ منه : $x^{1440}\equiv 1436x[2015]$ و لدينا : $x^{1404}\equiv 1[2015]$ إذن : $1436x\equiv 1[2015]$ منه : $\exists \sim\in Z\ /\ 1436x-2015\sim=1$ منه : $1436x-2015\sim=1436\times 1051-2015\times 749$ منه : $1436(x-1051)=2015(\sim -749)$ منه : $2015/1436(x-1051)$ ، و بما أن : $2015\wedge 1436=1$ فإن $2015/(x-1051)$ أي : $x\equiv 1051[2015]$

تمرين 3 :

$$M(x)=\begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}\quad ,\quad E=\{M(x)\ /\ x\in IR\}\quad ,\quad \forall (x,y)\in IR^2\quad M(x)\mathrm{T}M(y)=M(x+y+1)$$

$$\ddot{}\ :\ IR\to E$$
$$x\mapsto \ddot{}(x)=M(x-1)$$

1	أ)	لدينا : $\forall (x,y)\in IR^2\quad \ddot{}(x+y)=M(x+y-1)$ و $\forall (x,y)\in IR^2\quad \ddot{}(x)\mathrm{T}\ddot{}(y)=M(x-1)\mathrm{T}M(y-1)=M(x-1+y-1+1)=M(x+y-1)$ إذن : $\forall (x,y)\in IR^2\quad \ddot{}(x+y)=\ddot{}(x)\mathrm{T}\ddot{}(y)$ ، إذن : $\ddot{}$ تشاكل من $(IR,+)$ نحو (E,T)
	ب)	لدينا $\forall x\in IR\quad \ddot{}(x+1)=M(x)$ إذن $\forall M\in E\ \exists m\in IR\ /\ \ddot{}(m)=M$ أي أن $\ddot{}$ شمول أي : $\ddot{}(IR)=E$ إذن و بما أن : $(IR,+)$ زمرة تبادلية فإن (E,T) زمرة تبادلية عنصرها الحايد هو: $\ddot{}(0)=M(-1)$
2	أ)	لدينا لكل $(x,y)\in IR^2$: $M(x)\times M(y)=\begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1-y & y \\ -2y & 1+2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1-x)(1-y)-2xy & y(1-x)+x(1+2y) \\ -2x(1-y)-2y(1+2x) & -2xy+(1+2x)(1+2y) \end{pmatrix}$ $M(x)\times M(y)=\begin{pmatrix} 1-x-y+xy-2xy & y-xy+x+2xy \\ -2x+2xy-2y-4xy & -2xy+1+2y+2x+4xy \end{pmatrix}$ $M(x)\times M(y)=\begin{pmatrix} 1-x-y-xy & y+x+xy \\ -2x-2y-2xy & 1+2y+2x+2xy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-(x+y+xy) & y+x+xy \\ -2(x+y+xy) & 1+2(x+y+xy) \end{pmatrix}$ $M(x)\times M(y)=M(x+y+xy)$
	ب)	بما أن : $(x,y)\in IR^2\ \Rightarrow x+y+xy\in IR$ فإن : $(M(x),M(y))\in E^2\ \Rightarrow M(x+y+xy)\in E\Rightarrow M(x)\times M(y)\in E$ إذن E جزء مستقر من $(M_2(IR),\times)$ ، ولدينا أيضا : $\forall (x,y)\in IR^2\quad M(x)\times M(y)=M(x+y+xy)=M(y+x+yx)=M(y)\times M(x)$ أي أن القانون × تبادلي
	ج)	لدينا : لكل $(x,y,z)\in IR^3$: $M(x)\times(M(y)\mathrm{T}M(z))=M(x)\times M(y+z+1)=M(x+y+z+1+x(y+z+1))$ $M(x)\times(M(y)\mathrm{T}M(z))=M(2x+y+z+xy+xz+1)$ $(M(x)\times M(y))\mathrm{T}(M(x)\mathrm{T}M(z))=M(x+y+xy)\mathrm{T}M(x+z+xz)=M(x+y+xy+x+z+xz+1)$ و $(M(x)\times M(y))\mathrm{T}(M(x)\mathrm{T}M(z))=M(2x+y+z+xy+xz+1)$ منه : $M(x)\times(M(y)\mathrm{T}M(z))=(M(x)\times M(y))\mathrm{T}(M(x)\mathrm{T}M(z))$ و لكون القانونين × و T تبادليان فإن : $(M(y)\mathrm{T}M(z))\times M(x)=(M(y)\times M(x))\mathrm{T}(M(z)\mathrm{T}M(x))$ إذن : × توزيعي بالنسبة لـ T في E
	د)	لدينا : $\forall x\in IR\quad M(x)\mathrm{T}M(-1)=M(-1)\mathrm{T}M(x)=M(x-1+1)=M(x)$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

	إذن $M(-1)$ هي العنصر المحايد في (E,T) ولدينا: $M(0)=I$ و، $\forall x\in IR \quad M(x)\times M(0)=M(0)\times M(x)=M(x+0+0)=M(x)$ إذن : I هي العنصر المحايد في $(E,\times)$	
3	أ) لدينا : $(\forall x\in IR-\{-1\}) \quad M(x)\times M\left(\frac{-x}{1+x}\right)=M\left(x-\frac{x}{1+x}-\frac{x^2}{1+x}\right)=M\left(\frac{x+x^2-x-x^2}{1+x}\right)=M(0)=I$	
	ب) لدينا : (E,T) زمرة تبادلية عنصرها المحايد : $M(-1)$ القانون $\times$ قانون تركيب داخلي تبادلي في E و تجميعي لأن $E\subset M_2(IR)$ و $(M_2(IR),\times)$ تجميعي القانون $\times$ توزيعي بالنسبة لـ T في E و له عنصر محايد هو : $I=M(0)$ إذن : $(E,T,\times)$ حلقة واحدية، و بما أن لكل $M(x)\in E-\{M(-1)\}$ مماثلا بالنسبة للقانون $\times$ هو $M\left(\frac{-x}{1+x}\right)$ فإن $(E,T,\times)$ جسم تبادلي	

التمرين الرابع :

الجزء الأول:

$$\begin{cases} f(x)=x\left(1+\ln^2 x\right); & x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\ln^2 x\right)=+\infty$ (لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\ln^2 x\right)=+\infty$)

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\ln^2 x\right)=+\infty$

ما يعني أن (C) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب جوار $+\infty$

2

أ) لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x+x\ln^2 x=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x+\left(\sqrt{x}\ln x\right)^2=0+0^2=0=f(0)$

إذن f متصلة يمين الصفر

للتذكير : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^r\ln(x)=0$ حيث $r\in Q^{*+}$ (في حالتنا : $r=\frac{1}{2}$)

ب) لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 1+\ln^2 x=+\infty$ (لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=-\infty$)

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ ، ما يعني أن الدالة غير قابلة للاشتقاق يمين الصفر ، لكن المنحنى (C) يقبل نصف مماس عمودي في النقطة O له نفس منحى المتجهة $\vec{j}$

ليس من الضروري تحديد منحى نصف المماس، لكنه يساعد على اكتشاف أي خطأ في جدول التغيرات لاحقا

المنحى نعرفه انطلاقا من إشارة النتيجة و يمين أو يسار النهاية(في حالتنا $+\infty\times(+)\to+$) $\begin{cases}+\infty\\0^+\end{cases}$ أي الأعلى أي منحى $\vec{j}$

ج) لدينا : $\forall x>0 \quad f'(x)=1+\ln^2 x+x\left(2\ln x\times\frac{1}{x}\right)=1+\ln^2 x+2\ln x=(\ln x+1)^2$

لدينا : $\forall x>0 \quad (\ln x+1)^2\geq0$ ، و $(\ln x+1)^2=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

إذن $f'(x)$ موجبة على $]0;+\infty[$ و تنعدم في عدد وحيد ، إذن f تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

الرتابة القطعية تستوجب أحد حالتين:

- أن تكون المشتقة لها إشارة سالبة قطعا أو موجبة قطعا على كل المجال
- أن تكون موجبة أو سالبة و أن تنعدم في عدد معدود من الحلول (حل،حلان ...)

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

أ) لدينا لكل $x \in]0;+\infty[$: $f''(x) = 2(\ln x + 1) \times \frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\ln x + 1)$

ولدينا : $\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$ و $\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > e^{-1}$

إذن : $f''(x)$ تنعدم و تغير إشارتها في e^{-1} إذن فالمنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I أفصولها e^{-1}

ب) لدينا لكل $x \in]0;+\infty[$: $f(x) - x = x\ln^2 x \geq 0$ و $f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

إذن (C) يوجد فوق المستقيم (D): $y = x$ و يقطعه في النقطة $A(1;1)$

دراسة الوضع النسبي تستوجب أيضا دراسة نقط التقاطع

ج)

الشكل تم إنشاؤه باستعمال برنامج الموقع : Super Graph

الجزء الثاني:

$$\begin{cases} u_0 = e^{-1} \\ u_{n+1} = f(u_n) \ ; \ n \in IN \end{cases}$$

1 نعلم أن : $e > 1$ إذن : $\frac{1}{e} \leq \frac{1}{e} < 1$ أي : $\frac{1}{e} \leq u_0 < 1$

نفترض أن : $\frac{1}{e} \leq u_n < 1$ ، إذن : $f\left(\frac{1}{e}\right) \leq f(u_n) < f(1)$ (لأن f تزايدية على $]0;+\infty[$)

منه : $\frac{2}{e} \leq u_{n+1} < 1$ منه : $\frac{1}{e} \leq u_{n+1} < 1$ (لأن : $\frac{1}{e} < \frac{2}{e}$) ، إذن حسب مبدأ الترجع: $\forall n \in IN \quad \frac{1}{e} \leq u_n < 1$

2 لدينا : $\forall n \in IN \quad u_{n+1} - u_n = u_n \ln^2(u_n)$

و لدينا : $\forall n \in IN \quad u_n \ln^2(u_n) > 0 \Rightarrow \forall n \in IN \quad \begin{cases} \ln(u_n) < 0 \\ u_n > 0 \end{cases} \Rightarrow \forall n \in IN \quad \frac{1}{e} \leq u_n < 1$

إذن : $(u_n)_n$ متتالية تزايدية قطعا، وبما أنها مكبورة بالعدد 1 فهي متقاربة.

يمكن أيضا استعمال السؤال 3) ب) من الجزء الأول

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

3	أ)	لدينا : $\forall n\in IN \quad \frac{1}{e}\le u_n<1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}1=1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$ ، إذن : $\frac{1}{e}\le l\le 1$
	ب)	لدينا: الدالة f متصلة على $\left[\frac{1}{e};1\right]$ و $f\left(\left[\frac{1}{e};1\right]\right)=\left[\frac{2}{e};1\right]\subset\left[\frac{1}{e};1\right]$ والمتتالية $(u_n)_n$ متقاربة نهايتها l إذن l تحقق المعادلة $f(x)=x$ و التي حسب الجزء الأول تقبل حلين بالظبط 1 و 0 ولكون : $\frac{1}{e}\le l\le 1$ ، فإن : $l=1$

الجزء الثالث: $\forall x\in[0;+\infty[\quad F(x)=\int_1^x f(t)dt$

1	أ)	لدينا لكل $x\in]0;+\infty[$: $H'(x)=\left(\frac{-1}{4}x^2+\frac{1}{2}x^2\ln x\right)'=\frac{-2}{4}x+\frac{1}{2}\left(2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}\right)=\frac{-1}{2}x+x\ln x+\frac{1}{2}x=x\ln x=h(x)$ إذن الدالة H هي دالة أصلية للدالة h
	ب)	لدينا لكل $x\in]0;+\infty[$: $\int_1^x t\ln^2(t)dt=\int_1^x\left(\frac{1}{2}t^2\right)'\ln^2(t)dt=\left[\frac{1}{2}t^2\ln^2(t)\right]_1^x-\int_1^x\frac{1}{2}t^2\,2\ln(t)\times\frac{1}{t}dt=\frac{x^2}{2}\ln^2(x)-\int_1^x t\ln(t)dt$
	ج)	لدينا لكل $x\in]0;+\infty[$: $F(x)=\int_1^x t\left(1+\ln^2(t)\right)dt=\int_1^x t+t\ln^2(t)dt=\int_1^x t\,dt+\int_1^x t\ln^2(t)dt$ $F(x)=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^x+\frac{x^2}{2}\ln^2(x)-\left[\frac{-1}{4}t^2+\frac{1}{2}t^2\ln t\right]_1^x=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}\ln^2(x)-\left(\frac{-x^2}{4}+\frac{x^2}{2}\ln x\right)+\left(\frac{-1}{4}\right)$ $F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}\ln^2(x)+\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}=\frac{-3}{4}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{2}\ln^2(x)$
2	أ)	نعلم أن الدالة f متصلة على $[0;+\infty[$، إذن فهي تقبل دالة أصلية k متصلة و قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$، ومنه : $\forall[0;+\infty[\quad F(x)=k(x)-k(1)$ ، ما يعني أن الدالة F متصلة على $[0;+\infty[$
	ب)	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{-3}{4}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{2}\ln^2(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{-3}{4}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{(x\ln x)^2}{2}$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x)==\frac{-3}{4}+0-0+0=\frac{-3}{4}$ بما أن F متصلة يمين الصفر حسب السؤال السابق فإن : $\int_0^1 f(t)dt=-\int_1^0 f(t)dt=-F(0)=-\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x)=\frac{3}{4}$

التمرين الخامس :

$$\begin{cases} g(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt \quad ; x>0 \\ g(0)=\ln 2 \end{cases}$$

1	أ)	ليكن $x>0$ ، لدينا : $t\in[x,2x] \Rightarrow x\le t\le 2x \Rightarrow -2x\le -t\le -x \Rightarrow e^{-2x}\le e^{-t}\le e^{-x}$ إذن : $(\forall x>0)\ (\forall t\in[x,2x]) \quad e^{-2x}\le e^{-t}\le e^{-x}$
	ب)	حسب السؤال السابق نستنتج أن : $(\forall x>0)\ (\forall t\in[x,2x]) \quad \frac{e^{-2x}}{t}\le\frac{e^{-t}}{t}\le\frac{e^{-x}}{t}$ منه : $(\forall x>0) \quad \int_x^{2x}\frac{e^{-2x}}{t}dt\le\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt\le\int_x^{2x}\frac{e^{-x}}{t}dt$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

	منه: $(\forall x>0)\quad e^{-2x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\le g(x)\le e^{-x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt$ أي : $(\forall x>0)\quad e^{-2x}\left[\ln t\right]_x^{2x}\le g(x)\le e^{-x}\left[\ln t\right]_x^{2x}$ منه : $(\forall x>0)\quad e^{-2x}(\ln 2x-\ln x)\le g(x)\le e^{-x}(\ln 2x-\ln x)$ بالتالي : $(\forall x>0)\quad e^{-2x}\ln 2\le g(x)\le e^{-x}\ln 2$	
ج)	بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} e^{-x}\ln 2=\ln 2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} e^{-2x}\ln 2=\ln 2$ فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} g(x)=\ln 2=g(0)$ ، إذن g متصلة يمين 0	
2	بما أن الدالة $t\mapsto\frac{e^{-t}}{t}$ متصلة على $]0;+\infty[$ فهي تقبل دالة أصلية G متصلة و قابلة للاشتقاق على هذا المجال، ولدينا ، لكل $x>0$: $g(x)=G(2x)-G(x)$ ، وبما أن $x\mapsto 2x$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا : $\forall x>0\qquad g'(x)=2G'(2x)-G'(x)=2\frac{e^{-2x}}{2x}-\frac{e^{-x}}{x}=\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$	
3 أ)	ليكن $t>0$ ، الدالة $p:x\mapsto e^{-x}$ متصلة على $[0,t]$ و قابلة للاشتقاق على $]0,t[$ (لأنها متصلة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$)، إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية : $\frac{p(t)-p(0)}{t}=p'(c_t)\quad \exists c_t\in\,]0,t[$ ولدينا : $p'(x)=-e^{-x}\quad \forall x>0$ ، منه : $\frac{e^{-t}-1}{t}=-e^{-c_t}\quad \exists c_t\in\,]0,t[$ ولدينا : $c_t\in\,]0,t[\ \Rightarrow\ 0<c_t<t\ \Rightarrow\ -t<-c_t<0\ \Rightarrow\ e^{-t}<e^{-c_t}<1\ \Rightarrow\ -1<-e^{-c_t}<-e^{-t}$ منه : $-1<\frac{e^{-t}-1}{t}<-e^{-t}$ بالتالي : $-1<\frac{e^{-t}-1}{t}<-e^{-t}\quad \forall t>0$ أو أيضا : $-1\le\frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t}\quad \forall t>0$	
ب)	لدينا : $-1\le\frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t}\quad \forall t>0$ منه : $\int_x^{2x}-1dt\le\int_x^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}dt\le\int_x^{2x}-e^{-t}\,dt\quad \forall x>0$ منه : $\left[-t\right]_x^{2x}\le\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\le\left[e^{-t}\right]_x^{2x}\quad \forall x>0$ منه : $-2x+x\le g(x)-\ln 2\le e^{-2x}-e^{-x}\quad \forall x>0$ بالتالي : $-1\le\frac{g(x)-\ln 2}{x}\le\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}\quad \forall x>0$	
ج)	بما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{e^{-2x}-1}{x}-\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}-2\frac{e^{-2x}-1}{-2x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}=-2\times 1+1=-1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}-1=-1$ ، فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{g(x)-\ln 2}{x}=-1$ أي : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{g(x)-g(0)}{x}=-1$ ، ما يعني أن g قابلة للاشتقاق يمين الصفر.	

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma