

الصفحة 1 4	<b>الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا</b> <b>الدورة العادية 2015</b> <b>- الموضوع -</b>		<b>المملكة المغربية</b> <b>وزارة التربية الوطنية</b> <b>والتكوين المهني</b> <b>المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه</b>
	NS 24		
4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية ( أ ) و ( ب )	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالأعداد العقدية.....(3 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالبنىات الجبرية.....(4 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(6.5 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(3.5 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

الصفحة 2 4	NS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2015 - الموضوع - مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
------------------	-------	---

**التمرين الأول: (3 نقط)**

1- نعتبر في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة التالية:  $z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$  : (E)

(أ) تحقق أن  $(3 - i\sqrt{3})^2$  هو مميز المعادلة (E) 0.25

(ب) حدد  $a$  و  $b$  حلي المعادلة (E) (علما أن:  $b \neq 0$ ) 0.5

(ج) تحقق أن:  $b = (1 - i\sqrt{3})a$  0.25

2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر.  
لتكن A النقطة التي لحقها  $a$  و B النقطة التي لحقها  $b$

(أ) حدد العدد العقدي  $b_1$  لحق النقطة  $B_1$  صورة النقطة O بالدوران الذي مركزه A و زاويته  $\frac{P}{2}$  0.5

(ب) بين أن B هي صورة  $B_1$  بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته  $\sqrt{3}$  0.5

(ج) تحقق أن:  $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$  0.5

(د) لتكن C نقطة ، لحقها  $c$  ، تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OAB و تخالف A و O 0.5

حدد عمدة للعدد العقدي  $\frac{c}{c-a}$

**التمرين الثاني: (3 نقط)**

ليكن  $x$  عددا صحيحا نسبيا بحيث: [2015] 1436 ؛  $x^{1439}$

1- علما أن:  $1 = 749' - 2015' - 1051' - 1436'$  ، بين أن 1436 و 2015 أوليان فيما بينهما. 0.25

2- ليكن  $d$  قاسما مشتركا للعددين  $x$  و 2015

(أ) بين أن  $d$  يقسم 1436 0.5

(ب) استنتج أن  $x$  و 2015 أوليان فيما بينهما. 0.5

3- (أ) باستعمال مبرهنة فيرما بين أن:  $x^{1440} \equiv 1 [5]$  و  $x^{1440} \equiv 1 [13]$  و  $x^{1440} \equiv 1 [31]$  0.75

( لاحظ أن:  $2015 = 5.13.31$  )

(ب) بين أن:  $x^{1440} \equiv 1 [65]$  ثم استنتج أن:  $x^{1440} \equiv 1 [2015]$  0.5

4- بين أن : [2015] 1051 ؛  $x$  0.5

**التمرين الثالث: (4 نقط)**

نذكر أن  $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$  حلقة واحدة وحدتها  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  و  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  و أن  $(\square, +)$  زمرة تبادلية.

لكل عدد حقيقي  $x$  نضع:  $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ 2x & 1+2x \end{pmatrix}$  و نعتبر المجموعة  $E = \{M(x) / x \in \mathbb{C}\}$

الصفحة 3 4	NS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2015 - الموضوع - مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
------------------	-------	---

نزود  $E$  بقانون التركيب الداخلي  $T$  المعروف بما يلي:  $M(x)T M(y) = M(x + y + 1)$  ("  $x, y$  ) خ  $^2$  )

1- ليكن  $j$  التطبيق من  $E$  نحو  $E$  المعروف بما يلي:  $j(x) = M(x - 1)$  ("  $x$  ) خ  $^2$  )

(أ) بين أن  $j$  تشاكل من  $(+, \cdot)$  نحو  $(E, T)$  0.5

(ب) بين أن  $(E, T)$  زمرة تبادلية. 0.5

2- (أ) بين أن:  $M(x)' M(y) = M(x + y + xy)$  ("  $x, y$  ) خ  $^2$  ) 0.5

(ب) استنتج أن  $E$  جزء مستقر من  $(M_2(E), ', \cdot)$  و أن القانون " $\times$ " تبادلي في  $E$  0.5

(ج) بين أن القانون " $\times$ " توزيعي بالنسبة للقانون " $T$ " في  $E$ . 0.5

(د) تحقق أن  $M(-1)$  هو العنصر المحايد في  $(E, T)$  و أن  $I$  هو العنصر المحايد في  $(E, ')$ . 0.5

3- (أ) تحقق أن:  $M(x)' M\left(\frac{x}{1+x}\right) = I$  ("  $x$  ) خ  $^2$  ) 0.25

(ب) بين أن  $(E, T, ')$  جسم تبادلي. 0.75

#### التمرين الرابع: (6.5 نقط)

الجزء الأول: لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $[0, +\infty[$  بما يلي:

$$f(0) = 0 \quad \text{و} \quad f(x) = x(1 + \ln^2 x) \quad \text{إذا كان} \quad x > 0$$

ليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و ممنظم  $(O, i, j)$ .

1- أحسب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5

2- (أ) بين أن الدالة  $f$  متصلة على اليمين في 0 0.25

(ب) أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$  ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5

(ج) أحسب  $f'(x)$  من أجل  $x > 0$  ثم استنتج أن الدالة  $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $[0, +\infty[$  0.5

3- (أ) بين أن المنحنى  $(C)$  يقبل نقطة انعطاف  $I$  أفصولها  $e^{-1}$ . 0.25

(ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C)$  بالنسبة للمستقيم الذي معادلته:  $y = x$  0.25

(ج) أنشئ المنحنى  $(C)$ . (نأخذ:  $e^{-1} = 0.4$ ) 0.5

الجزء الثاني: نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بما يلي:  $u_0 = e^{-1}$  و  $u_{n+1} = f(u_n)$  ("  $n$  ) خ  $^2$  )

1- بين بالترجع أن:  $u_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  0.5

2- بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  تزايدية قطعاً ثم استنتج أنها متقاربة. 0.5

3- نضع:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  0.5

(أ) بين أن:  $e^{-1} \leq l \leq 1$  0.25

(ب) حدد قيمة  $l$  0.5

الصفحة 4	NS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2015 - الموضوع - مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
-------------	-------	---

الجزء الثالث: لتكن  $F$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $[0, +\infty[$  بما يلي:  $F(x) = \int_1^x f(t)dt$

0.25 1- (أ) بين أن الدالة:  $H: x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$  دالة أصلية للدالة:  $h: x \mapsto x \ln x$  على المجال  $]0, +\infty[$

0.5 (ب) بين أن:  $\int_1^x t \ln^2(t)dt = \frac{x^2}{2} \ln^2(x) - \int_1^x t \ln(t)dt$  ( $\forall x > 0$ )

0.5 (ج) استنتج أن:  $F(x) = -\frac{3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{x^2}{2} \ln^2(x)$  ( $\forall x > 0$ )

0.25 2- (أ) بين أن الدالة  $F$  متصلة على المجال  $[0, +\infty[$

0.5 (ب) أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$  ثم استنتج قيمة التكامل  $\int_0^1 f(x)dx$

التمرين الخامس: (3.5 نقط)

نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على المجال  $[0, +\infty[$  بما يلي:  $g(0) = \ln 2$  و  $g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$  إذا كان  $x > 0$

0.5 1- (أ) بين أن:  $e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$  ( $\forall t \in [x, 2x]$ ) ( $\forall x > 0$ )

0.5 (ب) بين أن:  $e^{-2x} \ln 2 \leq g(x) \leq e^{-x} \ln 2$  ( $\forall x > 0$ )

0.25 (ج) استنتج أن الدالة  $g$  متصلة على اليمين في 0.

0.75 2- بين أن الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0, +\infty[$  ثم أحسب  $g'(x)$  من أجل  $x > 0$

0.5 3- (أ) بين أن:  $-1 \leq \frac{e^{-t} - 1}{t} \leq -e^{-t}$  ( $\forall t > 0$ ) (يمكنك استعمال مبرهنة التزايديات المنتهية)

0.5 (ب) بين أن:  $-1 \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x} \leq \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$  ( $\forall x > 0$ )

0.5 (ج) استنتج أن الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على اليمين في 0.

انتهى