

التمرين الأول

$$n \in \mathbb{N}^*; a_n = \underbrace{333\dots31}_{n\times}$$

(1) لتحقق من أن a_1 و a_2 أوليان

لدينا $a_1 = 31$ و $a_2 = 31$ عدد أولي

لدينا $a_2 = 331$ لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية التي مربعها أصغر منه أي (2 - 3 - 5 - 7 - 11 - 13 - 17)

إذن 331 عدد أولي

a_1 و a_2 عداد أوليان

$$(2) \text{ لنبين أن } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 3a_n + 7 = 10^{n+1}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; a_n = 1 + 3 \times 10 + 3 \times 10^2 + \dots + 3 \times 10^n = 1 + 3(10 + 10^2 + \dots + 10^n) \text{ لدينا}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; a_n = 1 + \frac{10^{n+1} - 10}{3} = \frac{10^{n+1} - 7}{3} \text{ إذن } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 10 + 10^2 + \dots + 10^n = 10 \times \frac{1 - 10^n}{1 - 10} = \frac{10^{n+1} - 10}{9} \text{ و منه } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 3a_n + 7 = 10^{n+1}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 3a_n + 7 = 10^{n+1}$$

$$(3) \text{ لنبين أن } (\forall k \in \mathbb{N}) ; 10^{30k+2} \equiv 7[31]$$

لدينا حسب (2) $10^2 \equiv 7[31]$ إذن $10^2 - 7 = 3 \times 31$

و لدينا $10^2 \equiv 7[31] \Rightarrow 10^3 \equiv 70 \equiv 8[31] \Rightarrow 10^6 \equiv 64 \equiv 2[31] \Rightarrow 10^{30} \equiv 32 \equiv 1[31] \Rightarrow 10^{30k} \equiv 1[31]$

$$\begin{cases} 10^2 \equiv 7[31] \\ 10^{30k} \equiv 1[31] \end{cases} \Rightarrow 10^{30k+2} \equiv 7[31] \text{ وأخيرا}$$

$$(\forall k \in \mathbb{N}) ; 10^{30k+2} \equiv 7[31]$$

$$(4) \text{ لنبين أن } a_{30k+1} \equiv 0[31] \text{ ثم لنتستنتج أن } 31 \text{ يقسم } a_{30k+1} \text{ (}\forall n \in \mathbb{N} ; 3a_{30k+1} \equiv 0[31] \text{)}$$

لكل k من \mathbb{N} إذن $30k+1 \in \mathbb{N}^*$ حسب (3) و $3a_{30k+1} + 7 = 10^{30k+2}$

إذن $3a_{30k+1} \equiv 0[31]$ و منه $3a_{30k+1} + 7 \equiv 7[31]$

و بما أن $31 \wedge 3 = 1$ فإن حسب مبرهنة كوص 31 يقسم $3a_{30k+1}$ و $3a_{30k+1} \equiv 0[31]$

$$a_{30k+1} \equiv 0[31] \text{ (}\forall n \in \mathbb{N} ; 3a_{30k+1} \equiv 0[31] \text{)}$$

$$(5) \text{ لنبين أن المعادلة } a_n x + 31y = 1 \text{ لا تقبل حلول في } \mathbb{Z}^2$$

لدينا $(n \in \mathbb{N}^*) ; n \equiv 1[30] \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* ; n = 30k + 1$

و منه حسب السؤال (4) $a_n \equiv 1 \wedge 31 = 31$ أي أن $a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حلول في \mathbb{Z}^2

(الشرط اللازم لكي تقبل هذه المعادلة حلول في \mathbb{Z}^2 هو $1 \wedge 31 = 1$)

$$\text{المعادلة } a_n x + 31y = 1 \text{ لا تقبل حلول في } \mathbb{Z}^2$$

التمرين الثاني

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2; M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} \text{ و } E = \{M(a,b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

(1) لنبين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}), +)$

$$\bullet I = M(1,0) \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$$

$$\bullet (\forall (M(a,b), M(c,d)) \in E^2); M(a,b) - M(c,d) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-c & a-b-c+d \\ b-d & a+b-c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & (a-c)-(b-d) \\ b-d & (a-c)+(b-d) \end{pmatrix} = M(a-c, b-d) \in E$$

و منه حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية نستنتج أن :

$(M_2(\mathbb{R}), +)$ زمرة جزئية للزمرة E

$$\bullet \text{لدينا } J = M(1,0) \in E \text{ و } J^2 \notin E \text{ إذن } 1+0 \neq 2 \text{ و } J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ نستنتج أن :}$$

$(M_2(\mathbb{R}), \times)$ جزء غير مستقر من E

(3) لنبين أن φ تشكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو $(M_2(\mathbb{R}), *)$ نحو

لدينا

$$\left(\forall ((a,b), (c,d)) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})^2; \varphi((a+bi) \times (c+di)) = \varphi(ac-bd + i(ad+bc)) = M(ac-bd, ad+bc) \right)$$

و لدينا

$$\varphi(a+bi) * \varphi(c+di) = M(a,b) * M(c,d) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ac-ad-bc-bd \\ ad+bc & bc-bd+ac+ad \end{pmatrix} = M(ac-bd, ad+bc)$$

$$\left(\forall ((a,b), (c,d)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}; \varphi((a+bi) \times (c+di)) = \varphi(a+bi) * \varphi(c+di) \right)$$

و منه

$(M_2(\mathbb{R}), *)$ نحو (\mathbb{C}^*, \times) تشكل من φ

ب) لنبين أن $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$ حيث

لدينا: $M(a,b) \in E^* \Leftrightarrow (a,b) \neq (0,0) \Leftrightarrow a+bi \in \mathbb{C}^* \Leftrightarrow \varphi(a+bi) \in \varphi(\mathbb{C}^*) \Leftrightarrow M(a,b) \in \varphi(\mathbb{C}^*)$

إذن $M(a,b) \in E^* \Leftrightarrow M(a,b) \in \varphi(\mathbb{C}^*)$ و منه

$\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

ج) لنبين أن $(E^*, *)$ زمرة تبادلية

لدينا $\varphi(\mathbb{C}^*)$ زمرة تبادلية و φ تشكل من $(M_2(\mathbb{R}), *)$ نحو (\mathbb{C}^*, \times) زمرة تبادلية و لدينا $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

نستنتج أن

$$\boxed{زمرة تبادلية \left(E^*, * \right)}$$

(4) لدينا إذن $\boxed{\left(\forall (A, B, C) \in E^3 \right), A * (B + C) = A * B + A * C}$

(5) نستنتج مما سبق أن $\left(E, +, * \right)$ جسم تبادلي.

لدينا حسب (1) زمرة وحدتها O و لدينا حسب (3) $\left(E^*, *, + \right)$ زمرة تبادلية كما لدينا حسب (4) القانون $*$ توزيعي على القانون $+$ نستنتج أن

$$\boxed{\text{جسم تبادلي} \left(E, +, * \right)}$$

التمرين الثالث

(1) لتحقق من أن مميز المعادلة (E) هو $\Delta = (\sqrt{2}ie^{i\theta})^2$

لدينا: $\Delta = (\sqrt{2}e^{i\theta})^2 - 4e^{2i\theta} = 2e^{2i\theta} - 4e^{2i\theta} = -2e^{2i\theta} = (\sqrt{2}ie^{i\theta})^2$ إذن و منه

$$\boxed{\Delta = (\sqrt{2}ie^{i\theta})^2}$$

(ب) لنكتب الحلول z_1 و z_2 على الشكل المثلثي

بما أن $\Delta \neq 0$ فإن للمعادلة (E) حلول مختلفين هما:

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta} + \sqrt{2}ie^{i\theta}}{2} = \left[1, \frac{\pi}{4} \right] \times [1, \theta] = \left[1, \theta + \frac{\pi}{4} \right]$$

$$\boxed{z_1 = \left[1, \frac{\pi}{4} - \theta \right] \text{ و } z_2 = \left[1, \frac{\pi}{4} + \theta \right]}$$

(2) لنبين أن المستقيمين (OA) و (T_1T_2) متعمدان :

$$\frac{e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})} - e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2}e^{i\theta}} = \frac{-2i \sin \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} = -i = \left[1, -\frac{\pi}{2} \right] \text{ و } \overrightarrow{(OA, T_1T_2)} \equiv \text{Arg} \left(\frac{\text{aff}(\overrightarrow{T_1T_2})}{\text{aff}(OA)} \right) \equiv (2\pi)$$

لدينا إذن أي أن $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{T_1T_2}$ و منه

$$\boxed{\text{المستقيمين} (OA) \text{ و} (T_1T_2) \text{ متعمدان}}$$

(ب) لنبين أن النقط O, A و K مستقيمية

$$\frac{\text{aff}(\overrightarrow{OK})}{\text{aff}(\overrightarrow{OA})} = \frac{e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})} + e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}}{2\sqrt{2}e^{i\theta}} = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2}, 0 \right] \text{ و } \overrightarrow{(OA, OK)} \equiv \text{Arg} \left(\frac{\text{aff}(\overrightarrow{OK})}{\text{aff}(\overrightarrow{OA})} \right) (2\pi)$$

لدينا إذن أي أن المتجهتين \overrightarrow{OK} و \overrightarrow{OA} مستقيمتين و منه

$$\boxed{\text{النقط} O \text{ و} A \text{ و} K \text{ مستقيمية}}$$

ج) لنتنجز أن المستقيم (OA) هو واسط القطعة $[T_1T_2]$
لدينا (OA) عمودي على (T_1T_2) ولدينا K منتصف القطعة و
نستنتج أن

$[T_1T_2]$ هو واسط القطعة (OA)

أ) الصيغة العقدية للدوران r (3)

$$z' = iz + \sqrt{2}e^{i\theta}$$
 يكافي

$$z' = iz + e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} + e^{i(\theta+\frac{3\pi}{4})}$$
 لدينا

$$z' - e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} = e^{\frac{i\pi}{2}} \left(z - e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} \right)$$
 الصيغة العقدية للدوران r هي

$$z' = iz + \sqrt{2}e^{i\theta}$$

ب) لتحقق من أن لحق النقطة B صورة النقطة I بالدوران r هو
لدينا $b = i \times 1 + \sqrt{2}e^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i\theta} + i$ و منه

$b = \sqrt{2}e^{i\theta} + 1$

ج) لدينا $\frac{b - \sqrt{2}e^{i\theta}}{-2} = \frac{-i}{2} = \left[\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2} \right]$ و $(\overline{IJ}, \overline{AB}) \equiv \text{Arg} \left(\frac{\text{aff}(\overline{AB})}{\text{aff}(\overline{IJ})} \right) (2\pi)$

إذن $\overline{(IJ, AB)} \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$ إذن

المستقيمين (AB) و (IJ) متعامدين

لدينا $t_{-\vec{v}}(A) = C \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = -\vec{v} \Leftrightarrow z_C - \sqrt{2}e^{i\theta} = -i \Leftrightarrow z_C = -i + \sqrt{2}e^{i\theta}$ (4) و منه لحق النقطة C صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة \vec{v} هو

$$z_C = -i + \sqrt{2}e^{i\theta}$$

لدينا $\frac{z_C + z_B}{2} = \frac{-i + \sqrt{2}e^{i\theta} + i + \sqrt{2}e^{i\theta}}{2} = \sqrt{2}e^{i\theta} = z_A$ إذن

$[BC]$ هي منتصف القطعة A

التمرين الرابع

f الدالة المعرفة على $[0, +\infty[$ كما يلي: (I)

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2}; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) الدالة \ln متصلة على $[0, +\infty[$ و الدالة $\frac{-x}{1+x^2}$ متصلة على \mathbb{R} (دالة جذرية معرفة على \mathbb{R}) و بالخصوص على $[0, +\infty[$ إذن الدالة f متصلة على $[0, +\infty[$ (جداء دالتين متصلتين)

لندرس اتصال f على اليمين في 0 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x \ln x}{1+x^2} = 0 = f(0)$: إذن f متصلة على يمين 0

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

ذبي المغازلي

تصحيح الامتحان الوطني الموحد الدورة العادية 2014
مادة الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية. (أ) و (ب)

ثانوية محمد الخامس التاهيلية بالصويرة

Ammarimaths

f متصلة على $[0, +\infty]$ و متصلة على يمين 0 نستنتج أن

f متصلة على المجال $[0, +\infty]$

(ب) لندرس إشارة f على المجال $[0, +\infty]$

لدينا $f(0) = 0$ ولكل $x > 0$ إشارة $f(x)$ هي عكس إشارة $\ln x$ ومنه جدول إشارة $f(x)$ كما يلي:

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+
$f(x)$	0	+	0

(أ) لدينا :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\ln x}{x + \frac{1}{x}} = \frac{x \ln x}{x^2 + 1} = -f(x)$$

ومنه

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

(ب) لنبين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على $[0, +\infty]$

الدالة \ln قابلة للإشتقاق على $[0, +\infty)$ و الدالة $x \mapsto \frac{-x}{1+x^2}$ قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} و بالخصوص على $[0, +\infty]$

إذن الدالة f قابلة للإشتقاق على $[0, +\infty)$ (كجاء دالتيين قابلين للإشتقاق على هذا المجال)

(ج) لنبين أنه يوجد α من المجال $[0, 1]$ يحقق $f'(\alpha) = 0$

الدالة f متصلة على المجال $[0, 1]$ و قابلة للإشتقاق على المجال $[0, 1]$ إذن حسب مبرهنة رول يوجد على الأقل عنصر α

من المجال $[0, 1]$ يتحقق $f'(\alpha) = 0$ إذن

$$(\exists \alpha \in [0, 1]); f'(\alpha) = 0$$

(د) لنسنن أن $f'(\frac{1}{\alpha}) = 0$

بما أن $\alpha \in [0, 1]$ فإن $\frac{1}{\alpha} \in]1, +\infty]$ إذن f قابلة للإشتقاق عند $\frac{1}{\alpha}$

$(\forall x \in \mathbb{R}^*), f'(x) = -f'\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{-1}{x^2}$ نستنتج أن $(\forall x \in \mathbb{R}^*), f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$ (أ) ولدينا حسب (2)

$f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^2} f'(\alpha) = 0$ إذن $(\forall x \in \mathbb{R}^*), f'\left(\frac{1}{x}\right) = f'(x) \times \frac{1}{x^2}$ و منه

الصفحة (5)

$$f' \left(\frac{1}{\alpha} \right) = 0$$

F دالة معرفة على المجال $[0, +\infty]$ ب: $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ مبيانها في معلم متعمد منظم.

$$(\forall t \in [1, +\infty]) ; \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1 \quad (1)$$

$$(\forall t \in [1, +\infty]) ; 0 \leq 1 \leq t^2 \Rightarrow t^2 \leq 1+t^2 \leq 2t^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$$

لدينا و منه

$$(\forall t \in [1, +\infty]) ; \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$$

$$(\forall x \in [1, +\infty]) , F(1) - \frac{1}{2} (\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4} (\ln x)^2$$

انطلاقاً من المتفاوتة المزدوجة السابقة لدينا الاستلزمات المتالية:

$$(\forall t \in [1, +\infty]) ; \left(\frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1 \right) \stackrel{\left(\frac{\ln t > 0}{t} \right)}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{2} \frac{\ln t}{t} \leq \frac{t \ln t}{1+t^2} \leq \frac{\ln t}{t} \right) \stackrel{(x \geq 1)}{\Rightarrow} \left(\int_1^x \frac{1}{2} \frac{\ln t}{t} dt \leq \int_1^x \frac{t \ln t}{1+t^2} dt \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt \right)$$

$$(\forall t \in [1, +\infty]) ; -\frac{(\ln x)^2}{2} \leq -\int_1^x \frac{t \ln t}{1+t^2} dt \leq -\frac{(\ln x)^2}{4}$$

فإن $\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = \left[\frac{(\ln t)^2}{2} \right]_1^x = \frac{(\ln x)^2}{2}$ و حيث أن

وبعد إضافة $F(1)$ إلى أطراف المتفاوتة المزدوجة الأخيرة نحصل على

$$(\forall t \in [1, +\infty]) ; F(1) - \frac{(\ln x)^2}{2} \leq F(1) - \int_1^x \frac{t \ln t}{1+t^2} dt \leq F(1) - \frac{(\ln x)^2}{4}$$

و بمحاظة أن $F(1) - \int_1^x \frac{t \ln t}{1+t^2} dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt = \int_0^x f(t) dt = F(x)$ نحصل على المطلوب:

$$(\forall x \in [1, +\infty]) , F(1) - \frac{1}{2} (\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4} (\ln x)^2$$

ج) الحساب و التأويل الهندسي للنهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

لدينا حسب خاصيات النهايات و الترتيب

$$\begin{cases} (\forall x \in [1, +\infty]) , F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4} (\ln x)^2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F(1) - \frac{1}{4} (\ln x)^2 = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty$$

$$\begin{cases} (\forall x \in [1, +\infty]) , \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{2} \frac{(\ln x)^2}{x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{4} \frac{(\ln x)^2}{x} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{2} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{4} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$$

خلاصة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty$$

(2) أ) قابلية اشتقاق الدالة F على المجال $[0, +\infty]$ و حساب F'

بما أن f متصلة على المجال $[0, +\infty]$ فإن F هي أصليتها التي تنعدم عند 0 و منه F قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty]$ ولدينا

$$(\forall x \in [0, +\infty]); F'(x) = f(x)$$

$\boxed{(\forall x \in [0, +\infty]); F'(x) = f(x)}$

ب) نعلم حسب (1) أ) من الجزء الأول أن $0 < f(x) < 1$ على المجال $[0, +\infty]$

إذن جدول تغيرات الدالة F كما يلي

x	0	1	$+\infty$
$F(x)$	0	$F(1)$	$-\infty$

$(\forall t \in [0, +\infty]; -t \ln t \leq \frac{1}{e})$ (III)

نضع $(\forall t \in [0, +\infty]; \varphi(t) = 1 + e \cdot t \ln t)$

$(\forall t \in [0, +\infty]; \varphi'(t) = e \cdot (\ln t + 1))$ و $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = 1$ و $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$

إذن جدول تغيرات الدالة φ كما يلي

x	0	$1/e$	$+\infty$
$\varphi(x)$	1	0	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة φ نستنتج أن $\varphi(t) \geq 0$

$\boxed{(\forall t \in [0, +\infty]; -t \ln t \leq \frac{1}{e})}$

ب) نحن أن: $(\forall t \in [0, +\infty]; f(t) \leq \frac{1}{e})$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < -t \ln t \leq \frac{1}{e} \\ \frac{1}{1+t^2} < 1 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{-t \ln t}{1+t^2} < \frac{1}{e} \Rightarrow f(t) < \frac{1}{e}$$

إذا كان $t \geq 1$ فإن $\left(\frac{-t \ln t}{1+t^2} \leq 0 < \frac{1}{e} \right)$ و إذا كان $0 < t < 1$ فإن

ومن أجل $f(0) = 0 < \frac{1}{e}$: $t = 0$ نستنتج أن

$\boxed{(\forall t \in [0, +\infty]; f(t) < \frac{1}{e})}$

(ج) استنتاج أن $x > F(x)$

$$(\forall t \in [0, +\infty[); f(t) < \frac{1}{e} \Rightarrow (\forall x > 0); \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x \frac{1}{e} dt$$

$$\text{لدينا } \int_0^x \frac{1}{e} dt = \frac{1}{e} [t]_0^x = \frac{x}{e} < x \quad \text{لدينا}$$

$$(\forall x \in]0, +\infty[); F(x) < x$$

(2)

$$\begin{cases} u_0 \in]0, 1[\\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = F(u_n) \end{cases} \quad \text{متالية معرفة بـ } (u_n)$$

(أ) لتبين أن $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \in]0, 1[$

برهان بالترجع : لدينا $u_0 \in]0, 1[$ إذن العلاقة صحيحة من أجل $n = 0$

ليكن n من \mathbb{N} نفترض أن $u_n \in]0, 1[$

بما أن F تزايدية قطعا على المجال $]0, 1[$ فإن $0 < u_{n+1} < 1 \Rightarrow 0 < F(u_n) < F(1) < 1 \Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1$ نستنتج (حسب مبدأ الترجع) أن $u_{n+1} \in]0, 1[$.

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in]0, 1[$$

(ب) لتبين أن المتالية تنقصية قطعا ثم نستنتج أنها متقاربة

بما أن $(\forall n \in \mathbb{N}); F(u_n) < u_n \quad \text{فإن } III \text{ حسب (1)}$

و منه $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} < u_n$

إذن المتالية (u_n) تنقصية قطعا

(u_n) تنقصية و مصغررة بـ 0 إذن متقاربة

$$(u_n) \text{ متقاربة}$$

(ج) لنحسب نهاية المتالية (u_n)

نضع $I =]0, 1[$ الدالة F متصلة على I و لدينا $F(I) =]0, F(1)[\subset]0, \frac{1}{e}[\subset I$

$$\begin{cases} u_0 \in]0, 1[\\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = F(u_n) \xrightarrow{(u_n) \text{ converge}} \lim u_n = l \\ (u_n) \text{ converge} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(l) = l \\ l \in I \cup \{0\} \end{cases} \quad \text{إذن}$$

لحل في $I \cup \{0\}$ المعادلة $F(l) = l$

نعلم أن $x < F(x)$ إذن المعادلة ليس لها حل في I وبالتالي حلها الوحيد هو 0

$$\lim u_n = 0$$

التمرين الخامس

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}; x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

الدالة المعرفة على $[0, +\infty]$ بمالي

(1) نبين أن الدالة g متصلة على $[0, +\infty]$

الدالتيان $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ و $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ متصلتان على $[0, +\infty]$ و الدالة \exp متصلة على \mathbb{R} إذن الدالة $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ متصلة على $[0, +\infty]$

و بالتالي الدالة $x \mapsto \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ متصلة على $[0, +\infty]$ يعني الدالة g متصلة على $[0, +\infty]$

لدرس اتصال الدالة g على اليمين في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 e^t = 0 = g(0)$$

لدينا (0) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ إذن g متصلة على اليمين في 0

نستنتج أن الدالة g متصلة على $[0, +\infty]$

$$\forall (x \in [0, +\infty]); L(x) = \int_0^x g(t) dt \quad (2)$$

(أ) نبين أن الدالة L متصلة على $[0, +\infty]$

بما أن الدالة g متصلة على $[0, +\infty]$ فإنها تقبل دوالاً أصلية عليه و دالتها الأصلية التي تتعدم عند 0 هي dt

إذن L هي أصلية g على المجال $[0, +\infty]$ و تتحقق $L(0) = 0$

و منه L قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty]$ ما يعني أنها متصلة على $[0, +\infty]$

الدالة L متصلة على المجال $[0, +\infty]$

(ب) نحسب $L(x)$ من أجل $x > 0$

$$g(\forall x > 0); L(x) = \int_0^x g(t) dt = [G(t)]_0^x = G(x) - G(0)$$

لدينا (0) $G(x) - G(0)$

$$\begin{cases} G(x) = e^{-\frac{1}{x}}; x > 0 \\ G(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \end{cases}$$

و بما أن G متصلة على $[0, +\infty]$ فإن G معرفة كما يلي

نستنتج أن

$(\forall x > 0); L(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

ج) لدينا $L(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ وبما أن L متصلة على اليمين في 0 فإن

(3) لنبين أن المتالية $(s_n)_{n \geq 1}$ متقاربة و لنحدد نهايتها

$$\text{لدينا } (\forall n \in \mathbb{N}^*); s_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$$

بما أن الدالة g متصلة على المجال $[0,1]$ فإن المتالية $(s_n)_{n \geq 1}$ متقاربة و لدينا

$$\lim s_n = \frac{1}{e}$$

إضافة

بيان الدوال L ، g و f

