# أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2013

## التمرين الأول

### I 1

منهجية التفكير في هذا السؤال :

نضع $\alpha = (x-1)(y-1)$ و $\beta = (x-2)(y-2)$

نريد أن نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ x * y \in G$

يعني نريد أن نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ 1 < x*y < 2$

من أجل ذلك سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$$\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ x*y > 1 \quad \text{و} \quad x*y < 2$$

يعني سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$$\boxed{\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ \frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta} > 0 \quad \text{و} \quad \frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta} < 2}$$

يعني : $\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ \alpha + \beta > 0$ و $\alpha > 0$ و $\beta > 0$

**إلى العمل** : ليكن $x$ و $y$ عنصرين من المجال $G = ]1,2[$ .

إذن : $1 < x < 2$ و $1 < y < 2$ .

و منه : $0 < (x-1) < 1$ و $0 < (y-1) < 1$ .

أي : $0 < (x-1)(y-1) < 1$

و هذا يعني أن الكمية $(x-1)(y-1)$ كمية موجبة قطعا .

يعني : $(x-1)(y-1) > 0$

و لدينا كذلك : $1 < x < 2$ و $1 < y < 2$

إذن : $-1 < (x-2) < 0$ و $-1 < (y-2) < 0$

يعني أن : $(x-2)$ و $(y-2)$ كميتان سالبتان قطعا .

إذن : جداؤهما كمية موجبة قطعا . يعني : $(x-2)(y-2) > 0$

في المرحلة الأولى نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ x*y > 1$

و من أجل ذلك ننطلق من الكتابة : $(x-1)(y-1) > 0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية $(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)$

نحصل على : $2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)$
$> (x-1)(y-1) + (x-1)(y-2)$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعا التالية :

$$\boxed{\frac{1}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}}$$

نحصل على : $\dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)} > 1$

و هذا يعني أنه : $\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ x*y > 1$

في المرحلة الثانية نبين أن : $\boxed{\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ x*y < 2}$ $(1)$

و من أجل ذلك ننطلق من الكتابة : $(x-2)(y-2) > 0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية $(x-2)(y-2)$

نجد : $2(x-2)(y-2) > (x-2)(y-2)$

ثم نضيف بعد ذلك إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية $2(x-1)(y-1)$

نجد : $2(x-1)(y-1) + 2(x-2)(y-2)$
$> (x-2)(y-2) + 2(x-1)(y-1)$

يعني : $2[(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)]$
$> (x-2)(y-2) + 2(x-1)(y-1)$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعا :

$$\boxed{\frac{1}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}}$$

نجد : $2 > \dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$

يعني : $\boxed{\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ 2 > x*y}$ $(2)$

من النتيجتين $(1)$ و $(2)$ نستنتج أن : $\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ 1 < x*y < 2$

يعني : $\forall (x,y) \in G^2 \ ; \ x*y \in G$

و بالتالي $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة $G$ .

### I 2 أ

لدينا $f$ تطبيق معرف بما يلي :

$$\boxed{\begin{aligned} f \ : \ (\mathbb{R}_+^*, \times) &\longmapsto (G, *) \\ x &\longmapsto \frac{x+2}{x+1} \end{aligned}}$$

لكي يكون التطبيق $f$ تشاكلا يكفي أن نتحقق من أن :

$$\forall \, x,y \in \mathbb{R}_+^* \ ; \ f(x \times y) = f(x) * f(y)$$

ليكن $x$ و $y$ عنصرين من المجموعة $\mathbb{R}_+^*$ .

لدينا : $f(x) * f(y) = \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right) * \left(\dfrac{y+2}{y+1}\right)$

$$= \frac{2\left(\frac{x+2}{x+1}-1\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-1\right) + \left(\frac{x+2}{x+1}-2\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-2\right)}{\left(\frac{x+2}{x+1}-1\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-1\right) + \left(\frac{x+2}{x+1}-2\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-2\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right) + \left(\frac{-x}{x+1}\right)\left(\frac{-y}{y+1}\right)}{\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right) + \left(\frac{-x}{x+1}\right)\left(\frac{-y}{y+1}\right)}$$

$$= \frac{xy+2}{xy+1} = f(x \times y)$$

إذن : $\boxed{f(x) * f(y) = f(x \times y)}$

إذن $f$ تشاكل من $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ نحو $(G, *)$ .

لكي يكون $f$ تقابلا يكفي أن يحقق ما يلي :

$$(\forall y \epsilon G) \, , \, (\exists! \, x \in \mathbb{R}_+^*) \ : \ f(x) = y$$

أو بتعبير أسهل : يكون $f$ تطبيقا تقابليا عندما يكون للمعادلة $f(x) = y$ ذات المجهول $x$ حل وحيد في $\mathbb{R}_+^*$ مرتبط بـ $y$ .

ليكن $y$ عنصرا من المجموعة $G$ و لنحل في $\mathbb{R}_+^*$ المعادلة $f(x) = y$ .

هذه المعادلة تصبح : $\dfrac{x+2}{x+1} = y$

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم $(x+1)$

نجد : $(x+2) = y(x+1)$

يعني : $x + 2 = xy + y$ يعني : $x(1-y) = (y-1)$

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم $\dfrac{1}{1-y}$

نجد : $x = \dfrac{y-2}{1-y}$

نلاحظ أن التعبير $\dfrac{y-2}{1-y}$ وحيد لأنه إذا افترضنا غير ذلك .

أي وجود عدد آخر $y'$ يحقق $x = \dfrac{y'-2}{1-y'}$

فإنه سوف نحصل على : $\dfrac{y-2}{1-y} = \dfrac{y'-2}{1-y'}$

أي : $y - yy' - 2 + 2y' = y' - 2 - yy' + 2y$

أي : $(y-y')=0$ أي : $y=y'$

و بالتالي فإن التعبير $\dfrac{y-2}{1-y}$ وحيد .

إذن المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا وحيدا و هو $\dfrac{y-2}{1-y}$

يكفي الآن أن نتحقق من أن هذا الحل ينتمي إلى $\mathbb{R}_+^*$ .

يعني أنه يكفي أن نبين أن : $\forall\, y \in ]1,2[ \; ; \; \dfrac{y-2}{1-y}>0$

لدينا : $1<y<2$ إذن : $-1<(y-2)<0$

و لدينا : $1<y<2$ إذن : $-1<(1-y)<0$

إذن $(y-2)$ و $(1-y)$ كميتان سالبتان قطعا.

أي أن خارجهما كمية موجبة قطعا .

يعني : $\forall\, y \in ]1,2[ \; ; \; \dfrac{y-2}{1-y}>0$

إذن : $(\forall y\in G) , \left(\exists!\, x=\dfrac{y-2}{1-y} \in \mathbb{R}_+^*\right) \; : \; f(x)=y$

يعني أن $f$ تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $G$ .

**خلاصة** : $\boxed{f \text{ تشاكل تقابلي من } (\mathbb{R}_+^*,\times) \text{ نحو } (G,*)}$ .

**I 2 ب**

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الإنطلاق و يُحولها إلى مجموعة الوصول .

يعني أنه عندما نتوفر على تشاكل تقابلي $f$ من مجموعة $(E,*)$ نحو $(F,\top)$ فإنه نستنتج البنية الجبرية للمجموعة $(F,\top)$ انطلاقا من البنية الجبرية للمجموعة $(E,*)$ عن طريق التطبيق $f$ .

**و من ثم :**

إذا كان $*$ تبادلي أو تجميعي في $E$ فإن $\top$ تبادلي أو تجميعي في $F$ .

إذا كان $e$ هو العنصر المحايد للقانون $*$ في $E$ فإن $f(e)$ هو العنصر المحايد للقانون $\top$ في $F$ .

إذا كان $x'$ هو مماثل $x$ بالنسبة للقانون $*$ في $E$ فإن $f(x')$ هو مماثل $f(x)$ بالنسبة للقانون $\top$ في $F$

في هذا السؤال لدينا $f$ تشاكل تقابلي معرف بما يلي :

$$f \;:\; (\mathbb{R}_+^*,\times) \longmapsto (G,*)$$

إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة $(G,*)$ انطلاقا من البنية الجبرية لـ $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ عن طريق التطبيق $f$ .

و بما أن $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي 1

فإن $(G,*)$ زمرة تبادلية كذلك عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي $f(1)$

أي العدد $\frac{3}{2}$ . و للتأكد من ذلك يكفي أن نتحقق من أن :

$$\boxed{(\forall x\in G) \; ; \; x*\frac{3}{2}=\frac{3}{2}*x=x}$$

**II 1 أ**

**تذكير** : لتكن $(E,*,\top)$ حلقة و $e$ هو العنصر المحايد للقانون $*$ في $E$ .

نقول بأن عنصرا $x$ من $E$ قاسم للصفر إذا تحققت الشروط التالية :

$$\begin{cases} x\neq e \\ \exists\, y\in E\setminus\{e\} \; ; \; x\top y = y\top x = e \end{cases}$$

نعتبر الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ التي صفرها $\mathcal{O}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

و وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ .

لدينا :

$$\begin{aligned} A^3 &= A\times A\times A \\ &= \begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\mathcal{O}\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{A^3=\mathcal{O}}$

لدينا المصفوفة $\mathcal{O}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ هي العنصر المحايد لـ $+$ في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

نلاحظ في البداية أن $A\neq\mathcal{O}$

و لدينا : $A^3 = A\times A^2=\mathcal{O}$

مع : $A^2=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq\mathcal{O}$

إذن نستنتج أن $A\neq\mathcal{O}$ و توجد مصفوفة و هي $A^2$ تخالف $\mathcal{O}$

و تحقق $A\times A^2=A^2\times A=\mathcal{O}$

إذن حسب التذكير : المصفوفة $A$ قاسم للصفر في الحلقة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$

**II 1 ب**

$$\begin{aligned}(A^2-A+I)\times(A+I) &= A^3+A^2-A^2-A+A+I \\ &= A^3+I=\mathcal{O}+I=I\end{aligned}$$

و بما أن $A$ و $I$ مصفوفتان من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

فإن المصفوفة $(A^2-A+I)$ عنصر من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

و نعلم أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة تبادلية وحدتها $I$ إذن $\times$ تبادلي في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

يعني : $(A+I)\times(A^2-A+I)=(A^2-A+I)\times(A+I)=I$

و بالتالي $(A+I)$ مصفوفة قابلة للقلب في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$

و مقلوبها هو المصفوفة $(A^2-A+I)$ .

و لدينا : $(A+I)=\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

و لدينا كذلك :

$$\begin{aligned}(A^2-A+I) &= \begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}0&-3&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1&-3&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

**خلاصة** :

مقلوب المصفوفة $\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ هي المصفوفة $\begin{pmatrix}1&-3&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ .

## II 2

لكي يكون $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي
يكفي أن نتحقق من الشروط التالية :

$$\begin{cases} (E,+) \text{ زمرة تبادلية} \\ \alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y \\ (\alpha+\beta)\cdot x = \alpha\cdot x+\beta\cdot x \\ (\alpha\times\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x)\\ 1\cdot x = x\end{cases} \; ; \; \begin{pmatrix}\forall x,y\in E\\ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}\end{pmatrix}$$

بحيث $\times$ هو الضرب في $\mathbb{R}$
و $+$ هو جمع المصفوفات في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
و $\cdot$ هو ضرب مصفوفة في عدد حقيقي .
في البداية نبين أن $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$
لدينا $E$ جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتان من $E$ .

لدينا :
$$\begin{aligned} M(a,b)-M(c,d) &= aI+bA-cI-dA \\ &= (a-c)I+(b-d)A \\ &= M(\,a-c\;;b-d\,)\in E\end{aligned}$$

إذن $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$
و بما أن $+$ تبادلي في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ فإن $\boxed{(E,+) \text{ زمرة تبادلية}}$ **(1)**
نستنتج الخاصيات المتبقية من خلال كون $E$ جزء من الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ و كون $E$ جزء مستقر بالنسبة للقانون $(\cdot)$
و ذلك لأن : $\forall M(a,b)\in E\,,\forall\alpha\in\mathbb{R}\;;\;\alpha\cdot M(a,b)=M(\alpha a,\alpha b)\in E$

**إذن :**
$$\begin{cases} (E,+) \text{ زمرة تبادلية} \\ \alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B \\ (\alpha+\beta)\cdot A = \alpha\cdot A+\beta\cdot A \\ (\alpha\times\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta\cdot A)\\ 1\cdot A = A\end{cases} \; ; \; \begin{pmatrix}\forall A,B\in E\\ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}\end{pmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

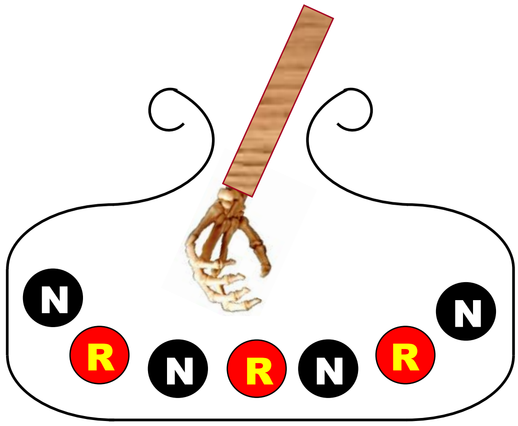
من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي
نعتبر الأسرة $(I,A)$ .
من الواضح أن الأسرة $(I,A)$ مولدة للفضاء المتجهي $(E,+,\cdot)$ .
لأن : $\forall M(a,b)\in E\;;\;M(a,b)=aI+bA$
يعني أن كل مصفوفة من $E$ تكتب على شكل تأليفة خطية للمصفوفتين $I$ و $A$
لنبين الآن أن الأسرة $(I,A)$ حرة .
من أجل ذلك ننطلق من تأليفة خطية منعدمة للمصفوفتين $I$ و $A$ .

$$a\cdot I+b\cdot A=\mathcal{O}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3b&2b\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}a&3b&2b\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$$

إذن الأسرة $(I,A)$ حرة .
و بما أن $(I,A)$ أسرة حرة و مولدة للفضاء المتجهي $E$ فإنها أساس لهذا الفضاء المتجهي الحقيقي

## التمرين الثاني

## I 1




عندما نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال أربع كرات من صندوق يحتوي على 7 كرات فإن هذه التجربة العشوائية تحتمل $7^4$ نتيجة ممكنة .
يعني : $card(\Omega)=7^4=2401$
بحيث : $\Omega$ هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .
$X$ هو المتغير العشوائي الذي يربط كل عملية بعدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق . إذن القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي $X$ هي 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 . يعني : $X(\Omega)=\{0,1,2,3,4\}$

قانون احتمال المتغير العشوائي $X$ سيكون إذن التطبيق $P_X$ المعرف على المجموعة $\{0,1,2,3,4\}$ نحو المجال $[0,1]$ بما يلي :

$$\begin{aligned} P_X \;:\; \{0,1,2,3,4\} &\longmapsto [0,1] \\ k &\longmapsto P_X(k)=p[X=k]\end{aligned}$$

لنحسب إذن احتمال كل قيمة $k$ من قيم المتغير العشوائي $X$ .

**لنحسب : $p[X=0]$**

الحدث $[X=0]$ هو الحصول على أربع كرات كلها حمراء و توجد $3^4$ امكانية لسحب الكرات الأربع .
إذن : $p[X=0]=\dfrac{3^4}{7^4}=\dfrac{81}{2401}$

**لنحسب : $p[X=1]$**

الحدث $[X=1]$ هو الحصول على كرة سوداء واحدة و ثلاث كرات حمراء . و من أجل ذلك لدينا :
$4^1$ إمكانية لسحب الكرة السوداء
$C_4^1$ إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة السوداء
$3^3$ إمكانية لسحب ثلاث كرات حمراء
إذن : $p[X=1]=\dfrac{4^1\times C_4^1\times 3^3}{7^4}=\dfrac{432}{2401}$

**لنحسب : $p[X=2]$**

الحدث $[X=2]$ هو الحصول على كرتين حمراوين و كرتين سوداوين .
و من أجل ذلك لدينا :
$4^2$ إمكانية لسحب الكرتين السوداوين .
$C_4^2$ إمكانية لاختيار مكان الكرتين السوداوين .
$3^2$ إمكانية لسحب الكرتين الحمراوين .
إذن : $p[X=2]=\dfrac{4^2\times C_4^2\times 3^2}{7^4}=\dfrac{864}{2401}$

لنحسب : $p[X=3]$

الحدث $[X=3]$ هو الحصول على ثلاث كرات سوداء و كرة حمراء واحدة . و من أجل ذلك لدينا :

$3^1$ إمكانية لسحب الكرة الحمراء .

$C_4^1$ إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة الحمراء .

$4^3$ إمكانية لسحب الكرات السوداء الثلاث .

إذن : $\boxed{p[X=3] = \dfrac{3^1 \times C_4^1 \times 4^3}{7^4} = \dfrac{768}{2401}}$

لنحسب : $p[X=4]$

الحدث $[X=4]$ هو الحصول على أربع كرات كلها سوداء .

إذن : $\boxed{p[X=4] = \dfrac{4^4}{7^4} = \dfrac{256}{2401}}$

و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي $X$ هو التطبيق $P_X$ المعرف بما يلي

$$P_X \ : \ \{0,1,2,3,4\} \longmapsto [0,1]$$

$$\begin{array}{l} 0 \longmapsto P_X(0) = \dfrac{81}{2401} \\ 1 \longmapsto P_X(1) = \dfrac{432}{2401} \\ 2 \longmapsto P_X(2) = \dfrac{864}{2401} \\ 3 \longmapsto P_X(3) = \dfrac{768}{2401} \\ 4 \longmapsto P_X(4) = \dfrac{256}{2401} \end{array}$$

و للتأكد من صحة الجواب يجب أن نحصل على :

$$\boxed{\frac{81}{2401} + \frac{432}{2401} + \frac{864}{2401} + \frac{768}{2401} + \frac{256}{2401} = 1}$$

**2** **I**

$$E(X) = \sum_{0}^{4} k \cdot p[X=k]$$

$$= 0\left(\frac{81}{2401}\right) + 1\left(\frac{432}{2401}\right) + 2\left(\frac{864}{2401}\right) + 3\left(\frac{768}{2401}\right) + 4\left(\frac{256}{2401}\right)$$

$$= \frac{5488}{2401} = \frac{16}{7}$$

**1** **II**

لدينا : $p(E \cap N) = p_N(E) \times p(N)$

و لدينا كذلك الحدث $E$ هو الحصول على ثلاث كرات سوداء من خلال ثلاث سحبات متتابعة بدون إحلال .

إذن نستطيع تجزيء الحدث $E$ في المرحلة الثالثة إلى ثلاث أحداث جزئية و مستقلة فيما بينها و هي :

$E_1$ : الحصول على كرة سوداء في السحبة الأولى

$E_2$ : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثانية

$E_3$ : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثالثة

إذن نكتب : $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3$

و منه : $p_N(E) = p_N(E_1) \times p_N(E_2) \times p_N(E_3)$

يعني :

$$\begin{aligned} p(E \cap N) &= p_N(E) \times p(N) \\ &= p_N(E_1) \times p_N(E_2) \times p_N(E_3) \times p(N) \\ &= \frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{7}{10} \times \frac{4}{7} = \frac{2016}{9240} = \boxed{\frac{12}{55}} \end{aligned}$$

**2** **II**

$$\begin{aligned} p(E) &= p(E \cap N) + p(E \cap R) \\ &= \frac{12}{55} + p_R(E_1) \times p_R(E_2) \times p_R(E_3) \times p(R) \\ &= \frac{12}{55} + \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{3}{7} \\ &= \frac{12}{55} + \frac{72}{9240} = \boxed{\frac{87}{385}} \end{aligned}$$

**3** **II**

لنحسب : $p_E(R)$

$$\begin{aligned} p_E(R) &= \frac{p(R \cap E)}{p(E)} = \frac{p_R(E) \times p(R)}{p(E)} \\ &= \frac{p_R(E_1) \times p_R(E_2) \times p_R(E_3) \times p(R)}{p(E)} \\ &= \frac{\frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{3}{7}}{\frac{87}{385}} = \boxed{\frac{1}{29}} \end{aligned}$$

## التمرين الثالث

**1** **I**

لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(E) : 2\,z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

لدينا :

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(a-1)^2 - 8(a-1)^2 \\ &= -4(a-1)^2 \\ &= \big(2i(a-1)\big)^2 \end{aligned}$$

إذن المعادلة $(E)$ تقبل حلين عقديين $z_1$ و $z_2$ .

$$z_1 = \frac{2(a-1) + 2i(a-1)}{4} = \frac{(a-1)(1+i)}{2}$$

$$z_2 = \frac{2(a-1) - 2i(a-1)}{4} = \frac{(a-1)(1-i)}{2}$$

**أ** **2** **I**

لدينا $a = e^{i\theta}$ مع $0 < \theta < \pi$ إذن : $(a-1) = e^{i\theta} - 1$

$$\begin{aligned} (a-1) = e^{i\theta} - 1 &= \cos\theta + i\sin\theta - 1 \\ &= \cos(\theta) - 1 + i\sin(\theta) \end{aligned}$$

هدفنا هو البحث عن $r$ و $\varphi$ بحيث : $(a-1) = r\,e^{i\varphi}$ .

يعني : $\cos(\theta) - 1 + i\sin(\theta) = r\cos(\varphi) + i\,r\sin(\varphi)$

أي : $\begin{cases} \cos(\theta) - 1 = r\cos(\varphi) \\ \sin(\theta) = r\sin(\varphi) \end{cases}$

من خلال دمج مربعي هاتين المتساويتين :

نجد : $(\cos(\theta) - 1)^2 + sin^2\theta = r^2(cos^2\theta + sin^2\theta)$

يعني : $\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 + \sin^2\theta = r^2$

يعني : $2(1-\cos\theta) = r^2$

يعني : $2\left(1-\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1\right)\right)=r^2$

يعني : $2\left(2-2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=r^2$

يعني : $4\left(1-\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=r^2$

يعني : $4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=r^2$

يعني : $r=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ و $r>0$

يكفي الآن تحديد قيمة $\varphi$ . و ننطلق من الكتابة $\sin\theta = r\sin\varphi$

يعني : $\sin\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\varphi)$

يعني : $2\cancel{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cancel{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin(\varphi)$

يعني : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sin(\varphi)$

يعني : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$

يعني : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$

يعني : $\frac{\theta}{2}\equiv\varphi-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

يعني $\varphi\equiv\frac{\theta-\pi}{2}\ [2\pi]$

إذن : $\boxed{(a-1)=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}}$

### I 2 ب

في البداية لدينا :

$$(1+i)=\sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\,\frac{\sqrt2}{2}\right) = \sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt2 e^{\frac{i\pi}{4}}$$

و لدينا كذلك :

$$(1-i)=\sqrt2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)=\sqrt2e^{\frac{-i\pi}{4}}$$

إذن :

$$z_1 = \frac{(a-1)(1+i)}{2} = \frac12\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sqrt2\, e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$z_2 = \frac{(a-1)(1-i)}{2} = \frac12\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sqrt2\, e^{\frac{-i\pi}{4}} = \sqrt2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{-i\pi}{4}}$$

### II 1

لدينا $J$ هي منتصف القطعة $[AC]$ .

إذن : $\boxed{aff(J)=\frac{aff(A)+aff(C)}{2}=\frac{a+i}{2}}$

و لدينا $K$ هي منتصف القطعة $[AB]$ .

إذن : $\boxed{aff(K)=\frac{aff(A)+aff(B)}{2}=\frac{a-i}{2}}$

### II 2

لدينا $r_1$ دوران مركزه $J$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ .

و لدينا $r_1(C)=C'$ إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$(aff(C')-aff(J)) = e^{\frac{i\pi}{2}}(aff(C)-aff(J))$$

$$\Leftrightarrow \left(c'-\frac{a+i}{2}\right) = i\left(i-\frac{a+i}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow c' = \frac{-1-ia+a+i}{2} = \frac{(a-1)(1-i)}{2}=z_2$$

و بنفس الطريقة لدينا $r_2$ دوران مركزه $K$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

و لدينا $r_2(A)=A'$ إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$(aff(A')-aff(K))=e^{\frac{i\pi}{2}}(aff(A)-aff(K))$$

$$\Leftrightarrow \left(a'-\frac{a-i}{2}\right) = i\left(a-\frac{a-i}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow a' = \frac{ia-1+a-i}{2}=\frac{(a-1)(1+i)}{2}=z_1$$

إذن : $\boxed{c'=z_2 \quad \text{و} \quad a'=z_1}$

### II 3

لدينا :

$$\frac{a'-c'}{a-1} = \frac{\frac{(a-1)(i+1)}{2}-\frac{(a-1)(1-i)}{2}}{\frac{a-1}{1}}$$

$$=\frac{(a-1)(i+1-1+i)}{2}\times\frac{1}{(a-1)}$$

$$=\frac{i\cancel{(a-1)}}{\cancel{(a-1)}}=i$$

إذن : $\frac{a'-c'}{a-1}=i$ و منه : $\arg\left(\frac{a'-c'}{a-1}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$

يعني : $\left(\overrightarrow{B'A},\overrightarrow{C'A'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$

و هذا يعني أن المستقيم $(AB')$ عمودي على المستقيم $(A'C')$ .

أي أن المستقيم $(AB')$ ارتفاع في المثلث $A'B'C'$

لأن $B'\in(AB')$ و $(A'C')\perp(AB')$ .

## التمرين الرابع

### 1 أ

لدينا :

$$\lim_{x\to0^+}f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(0^+)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1=f(0)$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)}$

و هذا يعني أن الدالة $f$ متصلة على يمين الصفر .

لنحسب الآن نهاية $f$ بجوار $+\infty$ .

$$\lim_{x\to+\infty}f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(+\infty)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}$

## 1 ب

لدراسة اشتقاق الدالة $f$ على اليمين في 0 نحسب النهاية التالية :

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)$$

و من أجل ذلك نستعين بالنهايتين التاليتين :

$$\lim_{x\to0^+}(x\ln x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0^+} x\,(\ln x)^2=0$$

لدينا :

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1-\sqrt{1+(x\ln x)^2}}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}\right)$$

نضرب البسط و المقام في المرافق $\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)$ نجد :

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1-\sqrt{1+(x\ln x)^2}}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}}{1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1-1-(x\ln x)^2}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{-(x\ln x)^2}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}(-x(\ln x)^2)\left(\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)}\right)$$

$$=(-0)\left(\frac{1}{\sqrt{1+(0)^2}\left(1+\sqrt{1+(0)^2}\right)}\right)=(0)\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

إذن :

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=0$$

و هذا يعني أن الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على يمين الصفر و $f_d'(0)=0$ .

## 1 ج

**تذكير** : إذا كانت $g$ دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال $I$ .

و كانت $f$ دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال $J$ .

إذن تكون الدالة $f\circ g$ قابلة للإشتقاق على المجال $I$ إذا كان : $g(I)\subseteq J$

لدينا :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}$$

نضع : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ \varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

و نضع : $\forall\, x\in\,]0;+\infty[\ ;\ \psi(x)=x\ln x$

إذن : $\forall\, x\in\,]0;+\infty[\ ;\ f(x)=\varphi\circ\psi\,(x)$

لدينا $\psi$ دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

و $\varphi$ دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ .

إذن تكون الدالة $\psi\circ\varphi$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

إذا كان : $\psi(\,]0,+\infty[\,)\subseteq\mathbb{R}$

ليكن $x$ عنصرا من المجال $]0,+\infty[$ .

لدينا : $\psi(x)=x\ln x\in\left[\frac{1}{e},+\infty\right[\subset\mathbb{R}$

إذن : $\psi(\,]0,+\infty[\,)\subseteq\mathbb{R}$

إذن الدالة $f=\varphi\circ\psi$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ .

ليكن $x$ عنصرا من المجال $]0,+\infty[$ . لدينا :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}=(1+(x\ln x)^2)^{\frac{-1}{2}}$$

إذن :

$$f'(x)=\frac{-1}{2}(1+(x\ln x)^2)^{\frac{-1}{2}-1}(1+(x\ln x)^2)'$$

$$=\frac{-1}{2}(1+(x\ln x)^2)^{\frac{-3}{2}}(2x\ln x)(x\ln x)'$$

$$=\frac{-1}{2}(1+(x\ln x)^2)^{\frac{-3}{2}}(2x\ln x)(1+\ln x)$$

$$=\frac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{(1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

إذن :

$$(\forall x>0)\ ;\ f'(x)=\frac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{(1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

## 1 د

نلاحظ في البداية أن : $(\forall x>0)\ ;\ (1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}>0$

إذن إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارتي الكميتين $(\ln x)$ و $(1+\ln x)$ .

الكمية $\ln x$ تنعدم في 1 و الكمية $1+\ln x$ تنعدم في $\frac{1}{e}$ .

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة $f$ كما يلي :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | \|\| | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $1+\ln x$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $1$ | ↘ | $f\left(\frac{1}{e}\right)$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

## 2 أ

لدينا :

$$\int\frac{1}{x\ln x}dx=\int\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln x}dx=\int\frac{(\ln x)'}{(\ln x)}dx$$

$$=\ln(|\ln x|)+c\quad;\quad c\in\mathbb{R}$$

بما أن : $x\in[e;+\infty[$ فإن : $\ln x\geq 1$

نأخذ الثابتة $c$ تساوي 0 نجد أن الدالة $x\to\ln(\ln x)$ دالة أصلية

للدالة $x\to\frac{1}{x\ln x}$ على المجال $[e;+\infty[$ .

و أشير إلى أن $x\to\ln(\ln x)$ دالة معرفة و متصلة على $]1;+\infty[$

إذن فهي متصلة على $[e,+\infty[$ لأن : $[e,+\infty[\ \subset\ ]1,+\infty[$ .

2 ب

ليكن $t$ عنصرا من المجال $[e,+\infty[$ .
نـنطلق من المتفاوتة $1 > 0$ و نضيف إلى طرفيها الكمية $(t\ln t)^2$
نجد : $(t\ln t)^2 < 1+(t\ln t)^2$
و منه : $\sqrt{(t\ln t)^2} < \sqrt{1+(t\ln t)^2}$
يعني : $(\forall t \geq e)\ ;\ t\ln t < \sqrt{1+(t\ln t)^2} \quad \textbf{(1)}$
و لدينا كذلك $t \geq e$ إذن $\ln t \geq 1$ .
نضرب هاتين المتفاوتتين طرفا بطرف نجد : $t\ln t \geq e > 1$
نحتفظ بالمتفاوتة : $(\forall t \geq e)\ ;\ t\ln t > 1$
التي تصبح : $(\forall t \geq e)\ ;\ (t\ln t)^2 > 1$
نضيف إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية $(t\ln t)^2$
نجد : $(\forall t \geq e)\ ;\ 2\,(t\ln t)^2 > 1+(t\ln t)^2$
يعني : $(\forall t \geq e)\ ;\ \sqrt{2}\,t\ln t > \sqrt{1+(t\ln t)^2} \quad \textbf{(2)}$
من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall t \geq e)\ ;\ t\ln t < \sqrt{1+(t\ln t)^2} < \sqrt{2}\,t\ln t}$$

2 ج

من خلال آخر تأطير حصلنا عليه نستنتج أن :

$$(\forall t \geq e)\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t\ln t}\right) < \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}} < \frac{1}{t\ln t}$$

ليكن $x$ عددا حقيقيا بحيث $x \geq e$ .
نُدخل التكامل $\int_e^x dt$ على هذا التأطير نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_e^x \left(\frac{1}{t\ln t}\right)dt < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}\,dt < \int_e^x \frac{1}{t\ln t}\,dt$$

يعني : $\frac{1}{\sqrt{2}}[\ln(\ln t)]_e^x < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}\,dt < [\ln(\ln t)]_e^x$

يعني : $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}\,dt < \ln(\ln x)$

2 د

لدينا حسب آخر تأطير :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}\,dt < \ln(\ln x)$$

إذن : $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \int_e^x f(t)\,dt < \ln(\ln x)$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} \ln(\ln x) = \ln(\ln(+\infty)) = \ln(+\infty) = +\infty$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x)}_{x\to+\infty \;\to\; +\infty} < \int_e^x f(t)\,dt < \underbrace{\ln(\ln x)}_{x\to+\infty \;\to\; +\infty}$$

و هذا يعني حسب خاصية التأطير و النهايات أن :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \int_e^x f(t)\,dt = +\infty}$$

إذن :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} F(x) &= \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^e f(t)\,dt + \int_e^x f(t)\,dt\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^e f(t)\,dt\right) + \lim_{x\to+\infty}\left(\int_e^x f(t)\,dt\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\begin{matrix}constante\\ réelle\end{matrix}\right) + \lim_{x\to+\infty}\left(\int_e^x f(t)\,dt\right) \\ &= (+\infty)+(+\infty) = +\infty\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty} \quad \textbf{(1)}$

من جهة ثانية ، لدينا :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \int_e^x f(t)\,dt < \ln(\ln x)$$

نضرب أطراف هذا التأطير في العدد الموجب قطعا $x$ نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right) < \frac{1}{x}\int_e^x f(t)\,dt < \frac{\ln(\ln x)}{x}$$

لنحسب النهاية : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right)$

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right)\times\frac{\ln x}{\ln x} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right)\times\frac{\ln x}{x} \\ &= \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty\\ y=\ln x}} \frac{\ln y}{y}\times\frac{\ln x}{x} = 0\times 0 = 0\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right) = 0}$

و نحصل بذلك على الوضعية التالية :

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right)}_{x\to+\infty \;\to\; 0} < \frac{1}{x}\int_e^x f(t)\,dt < \underbrace{\frac{\ln(\ln x)}{x}}_{x\to+\infty \;\to\; 0}$$

و منه حسب خاصية النهايات و التأطير نستنتج أن :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_e^x f(t)\,dt = 0}$$

نستغل إذن هذه النهاية لحساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_0^e f(t)\,dt+\int_e^x f(t)\,dt\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_0^e f(t)\,dt\right)+\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_e^x f(t)\,dt\right)}_{0}$$
$$=\left(\frac{1}{+\infty}\right)\times\left(\begin{matrix}constante\\ réelle\end{matrix}\right)+0=0$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0}$ $(2)$

و يمكن تفسير النهايتين $(1)$ و $(2)$ بقولنا : المنحنى $(\mathscr{C}_F)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل .

### 2 هـ

لدراسة نقط انعطاف المنحنى $(\mathscr{C}_F)$ ندرس إشارة المشتقة الثانية $F''(x)$ .

لدينا $F$ دالة عددية معرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

إذن $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $[0,+\infty[$ .

أو بتعبير الاشتقاق نكتب : $\forall\, x\in[0,+\infty[\ ;\ F'(x)=f(x)$

و بما أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

فإن الدالة $F'$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ .

و لدينا : $(\forall\, x\in]0,+\infty[)\ ;F''(x)=f'(x)=\dfrac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{(1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$

إذن تنعدم الدالة $F''(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

عندما تنعدم الكميتين $(\ln x)$ و $(1+\ln x)$ .

أي تنعدم الدالة $F''(x)$ إذا كان $x=1$ أو $x=\frac{1}{e}$

و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطتين و ذلك حسب جدول الإشارة السابق .

و بالتالي $(\mathscr{C}_F)$ يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما على التوالي $\frac{1}{e}$ و $1$ .

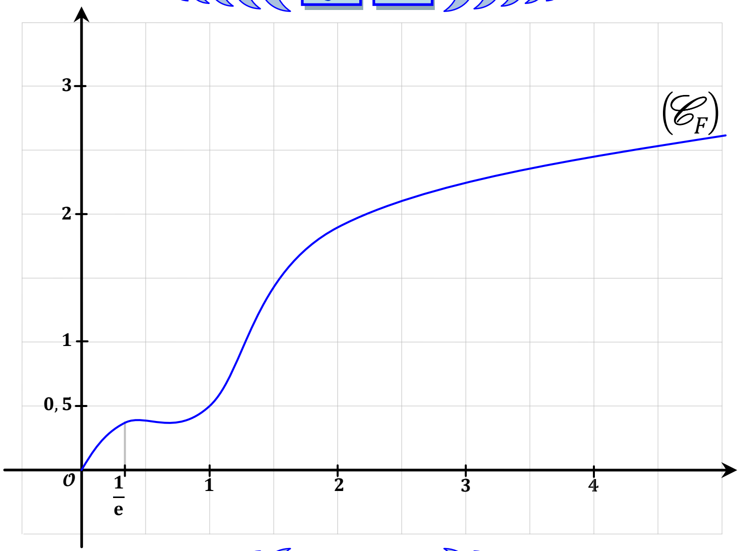
و يمكن أن نضيف جدول التقعر للمنحنى $(\mathscr{C}_F)$

و ذلك انطلاقا من جدول إشارة $f'(x)$ .

لأن : $\forall\, x\in]0,+\infty[\ ;\ F''(x)=f'(x)$

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $(\mathscr{C}_F)$ | | $(\mathscr{C}_F)$ مقعر | نقطة انعطاف | $(\mathscr{C}_F)$ محدب | نقطة انعطاف | $(\mathscr{C}_F)$ مقعر | |

### 2 ز




### 3 أ

نستعمل النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0$

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-F(x))=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{F(x)}{x}\right)$$
$$=(+\infty)(1-0)=+\infty$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty}$

من جهة ثانية لدينا $\varphi$ معرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\varphi(x)=x-F(x)$

و لدينا كذلك $F$ قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ بحيث : $F'(x)=f(x)$

إذن $\varphi$ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$

و لدينا : $\varphi'(x)=1-F'(x)=1-f(x)$

نلاحظ أنه إذا كان $x=0$ فإن $f(x)=1$

يعني : $1-f(x)$ أي : $\varphi'(x)=0$

<u>إذا كان</u> $0\le x\le\frac{1}{e}$ فإن $f(0)\ge f(x)\ge f\left(\frac{1}{e}\right)$

لأن $f$ دالة تناقصية على المجال $\left[0,\frac{1}{e}\right]$ .

إذن : $1\ge f(x)\ge f\left(\frac{1}{e}\right)$

يعني : $1-f(x)\ge 0$ أي : $\varphi'(x)\ge 0$

إذن $\varphi$ دالة تزايدية على المجال $\left[0,\frac{1}{e}\right]$ .

<u>إذا كان</u> $\frac{1}{e}\le x\le 1$ فإن $f\left(\frac{1}{e}\right)\le f(x)\le f(1)$

لأن $f$ دالة تزايدية على المجال $\left[\frac{1}{e},1\right]$ .

إذن $f\left(\frac{1}{e}\right)\le f(x)\le 1$ يعني : $1-f(x)\ge 0$ أي : $\varphi'(x)\ge 0$

إذن $\varphi$ دالة تزايدية على المجال $\left[\frac{1}{e},1\right]$ .

<u>إذا كان</u> : $x\ge 1$ فإن : $f(x)\le f(1)$

لأن $f$ دالة تناقصية على المجال $[1,+\infty[$ .

إذن : $f(x)\le 1$ يعني : $1-f(x)\ge 0$ أي : $\varphi'(x)\ge 0$ .

إذن $\varphi$ دالة تزايدية على المجال $[1,+\infty[$ .

<u>**خلاصة**</u> : $\varphi$ دالة تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$

## 3 ب

لدينا $\varphi$ دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$ .

إذن $\varphi$ تقابل من المجال $[0,+\infty[$ نحو صورته $\varphi(\,[0,+\infty[\,)$ .

و لدينا : $\varphi(\,[0,+\infty[\,) = \left[\varphi(0)\,;\,\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\right[ = [0,+\infty[$

إذن $\varphi$ تقابل من المجال $[0,+\infty[$ نحو المجال $[0,+\infty[$ .

و هذا يعني حسب تعريف التقابل :

$$(\,\forall\, y \in [0,+\infty[\,)\,,(\,\exists!\, x \in [0,+\infty[\,)\ ;\ \varphi(x) = y$$

ليكن $n$ عددا صحيحا طبيعيا .

إذن : $n \in [0,+\infty[$ لأن : $\mathbb{N} \subset [0,+\infty[$

إذن يوجد عنصر وحيد نرمز له بـ $\alpha_n$ في المجال $[0,+\infty[$

بحيث : $\varphi(\alpha_n) = n$

أو بتعبير آخر : المعادلة $\varphi(x) = n$ ذات المجهول $x$ تقبل حلا وحيدا

و هو $\alpha_n$ في المجال $[0,+\infty[$ و ذلك كيفما كان $n$ من $\mathbb{N}$ .

أو بتعبير أخير : $(\forall n\in\mathbb{N})\,,(\,\exists!\ \alpha_n \geq 0\,)\ ;\ \varphi(\alpha_n) = n$

## 3 ج

رأينا حسب السؤال ب) أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \alpha_n \geq 0$

إذن $F(\alpha_n) \geq F(0)$ لأن $F$ تزايدية على المجال $[0,+\infty[$ .

يعني أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ F(\alpha_n) \geq 0$ (1)

و نعلم أن : $(\forall x \geq 0)\ ;\ \varphi(x) = x - F(x)$

إذن : $\varphi(\alpha_n) = \alpha_n - F(\alpha_n)$ لأن : $\alpha_n \geq 0$

يعني : $F(\alpha_n) = \alpha_n - \varphi(\alpha_n)$ (2)

بدمج (1) و (2) نحصل على : $\alpha_n - \varphi(\alpha_n) \geq 0$

يعني : $\alpha_n \geq \varphi(\alpha_n)$

و نعلم أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \varphi(\alpha_n) = n$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \alpha_n \geq n$

نلاحظ أن : $\lim\limits_{n\infty} n = +\infty$ إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \alpha_n \geq n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty}$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}(\alpha_n) = +\infty}$

## 4 أ

ليكن $n \geq 1$ و $n\in\mathbb{N}$ .

لدينا الدالة $F$ متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$

بحيث : $\forall\, x \in [0,+\infty[\ ;\ F'(x) = f(x)$

إذن بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $F$ في أي مجال محدود يوجد ضمن $[0,+\infty[$ .

**في المرحلة الأولى** : نختار المجال $[0;\alpha_n]$ .

لدينا $[0;\alpha_n] \subset [0,+\infty[$ لأن $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \alpha_n \geq 0$

إذن ، حسب مبرهنة التزايدات المنتهية ، يوجد عنصر $c$ من المجال $]0;\alpha_n[$ بحيث :

$$\frac{F(\alpha_n)-F(0)}{\alpha_n - 0} = F'(c) = f(c)$$

يعني : $0 < c < \alpha_n$ و $\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = f(c)$

لدينا : $0 < c < \alpha_n$ إذن : $f(0) < f(c) < f(\alpha_n)$

و منه : $1 < \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(\alpha_n)$ $(*)$

بما أن $\alpha_n \geq n \geq 1$ فإن $n \in [1;+\infty[$ و $\alpha_n \in [1;+\infty[$

لدينا $\alpha_n \geq n$ إذن $f(\alpha_n) \leq f(n)$ لأن $f$ تناقصية على $[1;+\infty[$

إذن بالرجوع إلى التأطير $(*)$ نكتب :

$$0 < 1 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(\alpha_n) < f(n)$$

يعني : $\boxed{0 < \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(n)}$ (1)

في المرحلة الثانية نُطبق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $F$ في $[0;n]$

إذن يوجد عنصر $\varepsilon$ من $]0;n[$ بحيث :

$$\boxed{\frac{F(n)-F(0)}{n-0} = F'(\varepsilon) = f(\varepsilon)}$$

يعني : $0 < \varepsilon < n$ و $\dfrac{F(n)}{n} = f(\varepsilon)$

لدينا : $0 < \varepsilon < n$ إذن : $f(0) < f(\varepsilon) < f(n)$

يعني : $1 < \dfrac{F(n)}{n} < f(n)$ أي : $0 < 1 < \dfrac{F(n)}{n} < f(n)$

يعني : $0 < \dfrac{F(n)}{n} < f(n)$ أي : $\boxed{-f(n) < \dfrac{-F(n)}{n} < 0}$ (2)

نجمع التأطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نجد :

$$\boxed{-f(n) < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \frac{F(n)}{n} < f(n)}$$

ما يهمنا في هذا التأطير الغريب هو الشق الأيمن فقط .

أي : $\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \dfrac{F(n)}{n} < f(n)$

الذي يصبح : $\boxed{\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \dfrac{F(n)}{n} + f(n)}$ (3)

و من التأطير (1) نستنتج أن : $\boxed{0 < \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}}$ (4)

إذن من (3) و (4) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall n \geq 1)\ ;\ 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n)}\quad (\star)$$

## 4 ب

نعلم حسب الأسئلة السابقة أن :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{F(n)}{n} + f(n)\right) = 0$

و منه فإن التأطير $(\star)$ يُصبح :

$$(\forall n \geq 1)\ ;\ \underset{\substack{\downarrow\, n\infty \\ 0}}{0} < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \underset{\substack{\downarrow\, n\infty \\ 0}}{\underbrace{\frac{F(n)}{n} + f(n)}}$$

و منه حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$\boxed{\lim_{n\infty} \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = 0} \quad (\blacksquare)$$

من جهة أخرى نعلم أن : $(\forall x \geq 0)\ ;\ \varphi(x) = x - F(x)$

لدينا $\alpha_n \geq 0$ إذن $\varphi(\alpha_n) = \alpha_n - F(\alpha_n)$

و نعلم كذلك أن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ \varphi(\alpha_n) = n$

إذن : $n = \alpha_n - F(\alpha_n)$ يعني : $F(\alpha_n) = \alpha_n - n$

أي : $\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = \dfrac{\alpha_n - n}{\alpha_n} = 1 - \dfrac{n}{\alpha_n}$

يعني : $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = \lim\limits_{n\infty}\left(1 - \dfrac{n}{\alpha_n}\right)$

يعني : $0 = 1 - \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right)$ يعني : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right) = 1$

و بالتالي : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right) = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right)} = \dfrac{1}{1} = 1$

أي : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right) = 1}$

## التمرين الخامس

### 1

ليكن $n$ عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $n \geq 1$

لدينا :

$$\begin{aligned} v_n = \ln(u_n) &= \ln\left(\left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)^{n^2}\right) \\ &= n^2 \ln\left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right) \\ &= n^2\left[\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))\right] \end{aligned}$$

### 2

نعتبر $f$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \ln(\arctan(x))$

لدينا حسب الخاصيات العامة لاتصال مركب دالتين أن الدالة $f$ متصلة على $]0;+\infty[$ و كذلك $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ لأن $ln$ دالة قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و $arctan$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $]0;+\infty[ \subset \mathbb{R}$ .

إذن بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $f$ في أي مجال محدود و يوجد ضمن $]0;+\infty[$

ليكن $n \geq 1$ و نختار المجال $[n\ ;\ n+1]$ .

إذن يوجد عدد حقيقي $c$ من المجال $]n\ ;n+1[$ بحيث :

$$\boxed{\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c)} \quad (**)$$

لدينا : $\forall\ x \in\ ]0;+\infty[\ ;\ f(x) = \ln(\arctan(x))$

إذن :

$$f'(x) = \frac{(\arctan(x))'}{\arctan(x)} = \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{\arctan(x)} = \frac{1}{(1+x^2)\arctan(x)}$$

إذن بالرجوع إلى المتساوية $(**)$ نجد :

$$\boxed{\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = \frac{1}{(1+c^2)\arctan(c)}}$$

يعني :

$$\ln(\arctan(n+1)) - \ln(\arctan(n)) = \frac{1}{(1+c^2)\arctan(c)}$$

يعني :

$$\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1)) = \frac{-1}{(1+c^2)\arctan(c)}$$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الغير المنعدم $n^2$ نجد :

$$n^2[\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))] = \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$$

و باستعمال نتيجة السؤال 1 نجد : $\boxed{v_n = \dfrac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}}$

**خلاصة :**

$$\boxed{(\forall n \geq 1)\,,(\exists\, c \in\ ]n;n+1[\,)\ ;\ v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}}$$

### 3

لدينا : $n < c < n+1$

نُدخل الدالة $arctan$ على هذا التأطير و علما أنها تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ نجد :

$$(1)\quad \arctan(n) < \arctan(c) < \arctan(n+1)$$

و لدينا كذلك : $n < c < n+1$

إذن : $(1+n^2) < (1+c^2) < 1+(n+1)^2 \quad (2)$

نضرب التأطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نجد :

$$\begin{aligned} (1+n^2)\arctan(n) &< (1+c^2)\arctan(c) \\ &< (1+(n+1)^2)\arctan(n+1) \end{aligned}$$

نُدخل على هذا التأطير دالة المقلوب نجد :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)} &< \frac{1}{(1+c^2)\arctan(c)} \\ &< \frac{1}{(1+n^2)\arctan(n)} \end{aligned}$$

و نضرب أطراف هذا التأطير في العدد السالب قطعا $-n^2$ نجد :

$$\begin{aligned} \frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} &< \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)} \\ &< \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)} \end{aligned}$$

و نستنتج بعد ذلك نتيجة السؤال 2 نجد :

$$\boxed{\frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}}$$

$(\otimes)$

4

في البداية أذكركم بالنهايتين المهمتين التاليتين :

$$\lim_{x\to-\infty} arctan(x) = \frac{-\pi}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

لدينا :

$$\lim_{n\infty} \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)} = \lim_{n\infty}\left(\frac{-n^2}{n^2+2n+2}\right)\left(\frac{1}{arctan(n+1)}\right) = (-1)\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{-2}{\pi}$$

و لدينا كذلك :

$$\lim_{n\infty} \frac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)} = \lim_{n\infty}\left(\frac{-n^2}{n^2+1}\right)\left(\frac{1}{arctan(n+1)}\right) = (-1)\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{-2}{\pi}$$

إذن التأطير $(\otimes)$ يُصبح :

$$\underbrace{\left(\frac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)}\right)}_{\xrightarrow{n\infty} \frac{-2}{\pi}} < v_n < \underbrace{\left(\frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)}\right)}_{\xrightarrow{n\infty} \frac{-2}{\pi}}$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نجد : $\boxed{\lim_{n\infty}(v_n) = \frac{-2}{\pi}}$

و لدينا $v_n = \ln(u_n)$ إذن : $u_n = e^{v_n}$

و منه : $\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty} e^{v_n} = e^{\left(\lim_{n\infty} v_n\right)} = e^{\left(\frac{-2}{\pi}\right)}$

و بالتالي : $\boxed{\lim_{n\infty}(u_n) = e^{\left(\frac{-2}{\pi}\right)}}$

و الحمد لله رب العالمين