



مادة الرياضيات
شعبة العلوم الرياضية أ و ب
المعلم : 9
مدة الانجاز : أربع ساعات

الامتحانات الوطنية الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة الاستدراكية 2013



التمرين الأول : (3,5 ن)

الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما .

لكل x و y من المجال $G =]1,2[$ نضع : $x * y = \frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$



بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G .

نذكر أن $(\mathbb{R}_+, \times)$ زمرة تبادلية

و نعتبر التطبيق f المعرفة من $\mathbb{R}_+^*$ نحو G بما يلي : $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$

بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ نحو $(G, *)$.

استنتج أن $(G, *)$ زمرة تبادلية و حدد عنصرها المحايد .

نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة صفرها : $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و وحدتها : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

و أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و نضع : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

تحقق أن : $A^3 = \mathcal{O}$ ثم استنتج أن A قاسم للصفر في الحلقة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$

تحقق أن : $(A^2 - A + I)(A + I) = I$.

ثم استنتج أن المصفوفة $(A + I)$ تقبل مقلوبا في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ يتم تحديده .

لكل a و b من $\mathbb{R}$ نضع : $M(a, b) = a \cdot I + b \cdot A$.

و نعتبر المجموعة : $E = \{ M(a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}$

بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و حدد أساسا له .

التمرين الثاني : (3 ن)

يحتوي صندوق على 3 كرات حمراء و 4 كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس .

نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 4 كرات من الصندوق و نعتبر المتغير العشوائي X الذي

يساوي عدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق .



حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

ننجز التجربة العشوائية التالية في ثلاث مراحل كالآتي :

المرحلة الأولى : نسحب كرة من الصندوق ، نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق .

المرحلة الثانية : نضيف إلى الصندوق 5 كرات لها نفس لون الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى .

المرحلة الثالثة : نسحب بالتتابع و بدون إحلال 3 كرات من الصندوق الذي أصبح يحتوي على

12 كرة بعد المرحلة الثانية .

نعتبر الأحداث التالية : ☐ ☐ ☐

- $\{ \text{الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى سوداء} \} = N$
 $\{ \text{الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى حمراء} \} = R$
 $\{ \text{جميع الكرات المسحوبة في المرحلة الثالثة سوداء} \} = E$

بين أن : $p(E \cap N) = \frac{12}{55}$ ☐ 1 ☐ ☐ 0,50 ن

أحسب $p(E)$ ☐ 2 ☐ ☐ 0,50 ن

أحسب احتمال الحدث R علما أن الحدث E قد تحقق . ☐ 3 ☐ ☐ 0,50 ن



التمرين الثالث : (3,5 ن)

ليكن a عددا عقديا يخالف 1 . ☐ ☐ ☐ 1

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : ☐ ☐ ☐

$$(E) : 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

بين أن : $z_1 = \frac{(a-1)(1+i)}{2}$ و $z_2 = \frac{(a-1)(1-i)}{2}$ هما حلتي المعادلة (E) . ☐ 1 ☐ ☐ 0,50 ن

نأخذ $a = e^{i\theta}$ حيث $0 < \theta < \pi$. ☐ 2 ☐ ☐ 1

بين أن : $a - 1 = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}$ ☐ أ 2 ☐ ☐ 0,50 ن

استنتج الشكل المثلثي لكل من z_1 و z_2 . ☐ ب 2 ☐ ☐ 1,00 ن

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\sigma, \vec{u}, \vec{v})$. ☐ ☐ ☐ II

نفترض أن $\Re(a) < 0$ و نعتبر النقط $A(a)$ و $B(-i)$ و $C(i)$ و $B'(1)$. ☐ ☐ ☐

حدد لحقي كل من J و K منتصفتي القطعتين $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي بدلالة a . ☐ 1 ☐ ☐ 0,50 ن

ليكن r_1 الدوران الذي مركزه J و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$ و r_2 الدوران الذي مركزه K و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$. ☐ 2 ☐ ☐ 0,50 ن

نضع : $C' = r_1(C)$ و $A' = r_2(A)$. ☐ ☐ ☐

و ليكن c' لحق C' و a' لحق A' . بين أن : $a' = z_1$ و $c' = z_2$. ☐ ☐ ☐

أحسب $\left(\frac{a'-c'}{a-1}\right)$ ثم استنتج أن المستقيم (AB') ارتفاع في المثلث $A'B'C'$. ☐ 3 ☐ ☐ 0,50 ن



التمرين الرابع : (8,25 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(x \ln x)^2}}$ ☐ 1 ☐ $f(0) = 1$

بين أن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة 0 ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ☐ أ 1 ☐ ☐ 0,50 ن

أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في النقطة 0 (يمكنك استعمال النتيجة $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$) ☐ ب 1 ☐ ☐ 0,50 ن

بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$. و أن مشتقتها معرفة ب : ☐ ج 1 ☐ ☐ 0,50 ن

$$(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + (x \ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ضع جدول تغيرات الدالة f . ☐ د 1 ☐ ☐ 0,50 ن

لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ☐ 2 ☐
 و ليكن $(\mathcal{E}_F)$ المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم $(\sigma, \vec{i}, \vec{j})$. ☐ ☐ ☐
 حدد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ على المجال $[e, +\infty[$. ☐ 2 ☐ أ

0,25 ن

بين أن : $(\forall t \geq e) ; t \ln t < \sqrt{1 + (t \ln t)^2} < \sqrt{2} t \ln t$ ☐ 2 ☐ ب

0,50 ن

بين أن : $(\forall t \geq e) ; \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} dt < \ln(\ln x)$ ☐ 2 ☐ ج

0,75 ن

استنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ و أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ ☐ 2 ☐ د

0,50 ن

بين أن $(\mathcal{E}_F)$ يقبل نقطتي انعطاف المطلوب تحديد أفصول كل واحدة منهما . ☐ 2 ☐ هـ

0,50 ن

أنشئ $(\mathcal{E}_F)$ (نأخذ من أجل ذلك $F(1) \approx 0,5$ و $F\left(\frac{1}{e}\right) \approx 0,4$) ☐ 2 ☐ ز

1,00 ن

لكل x من المجال $[0, +\infty[$ نضع : $\varphi(x) = x - F(x)$. ☐ 3 ☐ ح

بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ ثم ادرس تغيرات الدالة φ . ☐ 3 ☐ أ

0,75 ن

بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$ ، المعادلة $\varphi(x) = n$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $[0, +\infty[$. ☐ 3 ☐ ب

0,50 ن

بين أن : $\alpha_n \geq n$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ ☐ 3 ☐ ج

0,50 ن

بين أن : $(\forall n \geq 1) ; 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n)$ ☐ 4 ☐ د

0,50 ن

(من أجل ذلك يمكن استعمال مبرهنة التزايد المتناهية)

أحسب النهاية : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha_n}{n} \right)$ ☐ 4 ☐ ب

0,50 ن

التمرين الخامس : (1,75 ن)

|||||

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = \left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)} \right)^{n^2}$ و $v_n = \ln(u_n)$ ☐ ☐ ☐

تحقق أن : $(\forall n \geq 1) ; v_n = n^2 [\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))]$ ☐ 1 ☐

0,25 ن

باستعمال مبرهنة التزايد المتناهية بين أن : ☐ 2 ☐

0,50 ن

$(\forall n \geq 1) , (\exists c \in]n ; n+1[) ; v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$

بين أن : $(\forall n \geq 1) ; \frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(1+n)^2)\arctan(n+1)}$ ☐ 3 ☐

0,50 ن

أحسب النهاية : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ☐ 4 ☐

0,50 ن