

إذن f تشاكل من (\mathbb{Z}, \times) نحو $(\mathbb{Z}, +)$.
لكي يكون f تقابلا يكفي أن يحقق ما يلي :

$$f(xy) = f(x) + f(y) ; (\forall x, y \in \mathbb{Z})$$

يعني : المعادلة $f(x) = y$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا في \mathbb{Z} .

$$f(x) = y \Leftrightarrow x + 2 = y \quad \text{لدينا :} \quad \Leftrightarrow x = y - 2 \in \mathbb{Z}$$

$$(\forall y \in \mathbb{Z}) , (\exists ! x = y - 2 \in \mathbb{Z}) ; f(x) = y$$

و هذا يعني أن التطبيق f تقابل من \mathbb{Z} نحو \mathbb{Z} .

خلاصة : f تشاكل تقابلي من (\mathbb{Z}, \times) نحو $(\mathbb{Z}, +)$.

التمرين الأول

1 أ

المجموعة \mathbb{Z} مزودة بالقانون * المعرف بما يلي :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; x * y = x + y - 2$$

لدينا * قانون تركيب داخلي لأنه إذا كان x و y عنصرين من \mathbb{Z}

$$\text{فإن } (x + y - 2) \in \mathbb{Z}$$

نبرهن على أن * تبادلي :

من أجل ذلك يكفي أن نلاحظ أن القانون + تبادلي في الحلقة

الواحدية التبادلية $(\mathbb{Z}, +, \times)$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; x * y = x + y - 2 = y + x - 2 = y * x$$

إذن * تبادلي في \mathbb{Z} .

نبرهن على أن القانون * تجميعي في \mathbb{Z} :

لتكن x و y و z ثلاثة عناصر من \mathbb{Z}

$$\text{لدينا : } (x * y) * z = (x * y) + z - 2 = x + y - 2 + z - 2$$

$$= x + (y + z - 2) - 2$$

$$= x + (y * z) - 2$$

$$= x * (y * z)$$

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 ; (x * y) * z = x * (y * z)$$

و منه فإن القانون * تجميعي في المجموعة \mathbb{Z} .

1 ب

ليكن ε العنصر المحايد للقانون * في المجموعة \mathbb{Z} .

$$\text{إذن : } (\forall x \in \mathbb{Z}) ; x * \varepsilon = \varepsilon * x = x$$

لتحديد قيمة ε ننتقل من التعبير : $x * \varepsilon = x$

$$\text{إذن : } x + \varepsilon - 2 = x \quad \text{و منه : } \varepsilon = 2 \in \mathbb{Z}$$

إذن 2 هو العنصر المحايد للقانون * في \mathbb{Z} .

1 ج

لكي تكون $(\mathbb{Z}, *)$ زمرة تبادلية يكفي أن نبرهن على أن كل عنصر من \mathbb{Z}

يقبل ماثلا من \mathbb{Z} بالقانون * .

ليكن x عنصرا من \mathbb{Z} . و x' ماثله بالنسبة للقانون * .

$$\text{إذن : } x * x' = x' * x = 2$$

ننتقل من المتساوية التالية : $x * x' = 2$

$$\text{إذن : } x + x' - 2 = 2 \quad \text{يعني : } x' = 4 - x$$

$$\text{بما أن } x \in \mathbb{Z} \text{ و } 4 \in \mathbb{Z} \text{ فإن } (4 - x) \in \mathbb{Z}$$

و بالتالي : كل عنصر x من \mathbb{Z} يقبل ماثلا في \mathbb{Z} و هو $(4 - x)$.

خلاصة : لقد حصلنا على المعلومات التالية :

* داخلي و تبادلي و تجميعي في \mathbb{Z} .

* يقبل عنصرا محايدا و هو 2 .

* كل عنصر x من \mathbb{Z} يمتلك ماثلا و هو $(4 - x)$.

إذن : $(\mathbb{Z}, *)$ زمرة تبادلية .

2 أ

نعتبر التطبيق f المعرف بما يلي :

$$x \mapsto f(x) = x + 2$$

لكي يكون f تشاكلا يكفي أن يحقق ما يلي :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; f(x \times y) = f(x) + f(y)$$

ليكن x و y عنصرين من المجموعة \mathbb{Z} .

$$\text{لدينا : } f(x) + f(y) = (x + 2) + (y + 2)$$

$$= (x + 2)(y + 2) - 2(x + 2) - 2(y + 2) + 6$$

$$= xy - 2 = f(x \times y)$$

2 ب

لتكن x و y و z ثلاثة أعداد نسبية ، لدينا من جهة أولى :

$$\begin{aligned} (x * y) \vdash z &= (x * y)z - 2(x * y) - 2z + 6 \\ &= (x + y - 2)z - 2(x + y - 2) - 2z + 6 \\ &= xz + yz - 4z - 2x - 2y - 2z + 10 \end{aligned}$$

و من جهة ثانية لدينا : $(x \vdash z) * (y \vdash z) = (x \vdash z) + (y \vdash z) - 2$

$$\begin{aligned} &= (xz - 2x - 2z + 6) + (yz - 2y - 2z + 6) - 2 \\ &= xz + yz - 4z - 2x - 2y - 2z + 10 \end{aligned}$$

نستنتج أن : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 ; (x * y) \vdash z = (x \vdash z) * (y \vdash z)$

أي : القانون \vdash توزيعي على * في \mathbb{Z} .

3

لنبين أن : $(\mathbb{Z}, *, \vdash)$ حلقة تبادلية و واحدة



حصلنا من خلال الأجوبة السابقة على المعلومات التاليتين :

(1) زمرة تبادلية $(\mathbb{Z}, *)$ و (2) القانون \vdash توزيعي على القانون *

لدينا f تشاكل تقابلي من (\mathbb{Z}, \times) نحو $(\mathbb{Z}, +)$

إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة $(\mathbb{Z}, +)$ انطلاقا من البنية الجبرية

للمجموعة (\mathbb{Z}, \times) و ذلك عن طريق التطبيق f .

لأنه و كما نعلم : التشاكل التقابلي يُحوّل البنية الجبرية لمجموعة الانطلاق إلى مجموعة الوصول .

بما أن الضرب \times تبادلي و تجميعي في (\mathbb{Z}, \times) و يقبل 1 كعنصر محايد .

فإن : (1) القانون \vdash تبادلي في \mathbb{Z} (3) و (4) القانون تجميعي في \mathbb{Z} (4)

و $f(1) = 3$ عنصر محايد للقانون \vdash في \mathbb{Z} (5)

إذن من النتائج (1) و (2) و (3) و (4) و (5) نستنتج أن $(\mathbb{Z}, +, \vdash)$

حلقة تبادلية و واحدة وحتتها العدد النسبي 3 .

4 أ

ليكن x و y عنصرين من المجموعة \mathbb{Z} . لدينا :

$$\begin{aligned} x \vdash y = 2 &\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 = 2 \\ &\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x(y - 2) - 2(y - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (y - 2)(x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (y - 2) = 0 \quad \text{أو} \quad (x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 2 \quad \text{أو} \quad x = 2 \end{aligned}$$



1

II

أقترح طريقتين في الجواب .

الطريقة الأولى:

$$\frac{\text{aff}(A) - \text{aff}(O)}{\text{aff}(B) - \text{aff}(O)} = \frac{a - 0}{ae^{\frac{i\pi}{3}} - 0} = e^{\frac{-i\pi}{3}} \text{ لدينا :}$$

$$\begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \text{ يعني : } \begin{cases} \frac{OA}{OB} = 1 \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \text{ إذن :}$$

$$\begin{cases} \left| \frac{\text{aff}(A) - \text{aff}(O)}{\text{aff}(B) - \text{aff}(O)} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{\text{aff}(A) - \text{aff}(O)}{\text{aff}(B) - \text{aff}(O)}\right) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \text{ إذن :}$$

و هذا يعني أن المثلث OAB متساوي الساقين رأسه O و قياس إحدى زواياه و هي الزاوية \widehat{O} يساوي 60° .
إذن : OAB مثلث متساوي الأضلاع .

الطريقة الثانية:

$$OA = |\text{aff}(A) - \text{aff}(O)| = |a - 0| = |a| \text{ لدينا :}$$

$$OB = |\text{aff}(B) - \text{aff}(O)| = |ae^{\frac{i\pi}{3}} - 0| = |a|$$

$$AB = |\text{aff}(B) - \text{aff}(A)| = |b - a| \text{ وكذلك :}$$

$$\begin{aligned} &= \left| ae^{\frac{i\pi}{3}} - a \right| = \left| a \left(e^{\frac{i\pi}{3}} - 1 \right) \right| = |a| \cdot \left| e^{\frac{i\pi}{3}} - 1 \right| \\ &= |a| \cdot \left| \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right| = |a| \cdot \left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = |a| \end{aligned}$$

نستنتج إذن أن : $OA = OB = AB$ و $A \neq B \neq C$ إذن OAB مثلث متساوي الأضلاع .

1

2

II

$$r_M\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$(P) \longrightarrow (P)$$

لدينا r دوران مُعرّف بما يلي :

$$r(A_1) = A \text{ : إذن } A_1 = r^{-1}(A)$$

و منه حسب التعريف العقدي للدوران r نكتب :

$$(\text{aff}(A) - \text{aff}(M)) = e^{\frac{i\pi}{3}} (\text{aff}(A_1) - \text{aff}(M))$$

$$(a - z) = e^{\frac{i\pi}{3}} (a_1 - z) \text{ يعني :}$$

$$(a - z) = e^{\frac{i\pi}{3}} a_1 - e^{\frac{i\pi}{3}} z \text{ يعني :}$$

$$e^{\frac{i\pi}{3}} a_1 = a - z + e^{\frac{i\pi}{3}} z \text{ يعني :}$$

$$a_1 = e^{\frac{-i\pi}{3}} (a - z + e^{\frac{i\pi}{3}} z) \text{ يعني :}$$

$$a_1 = e^{\frac{-i\pi}{3}} a - e^{\frac{-i\pi}{3}} z + z \text{ يعني :}$$

$$e^{\frac{-i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) \text{ من جهة أخرى لدينا :}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$



4

ب

تكون الحلقة $(\mathbb{Z}, *, T)$ كاملة إذا كانت لا تحتوي على قواسم للصفر .

ليكن x قاسما للصفر في $(\mathbb{Z}, *, T)$.

$$\exists y \in \mathbb{Z} \setminus \{2\} ; x \top y = y \top x = 2$$

و منه حسب نتيجة السؤال (4) : $x = 2$ أو $y = 2$

إذن لا وجود لأي قاسم للصفر لأن قواسم الصفر إن وجدت يجب أن تخالف

العنصر المحايد 2 و بالتالي $(\mathbb{Z}, *, T)$ حلقة كاملة .

4

ج

تكون الحلقة الواحدية $(\mathbb{Z}, *, T)$ جسما إذا كان كل عنصر من $\mathbb{Z} \setminus \{2\}$

يقبل مائلا (أو مقلوبا) في (\mathbb{Z}, T) .

و لذلك نحدد أولا الصيغة العامة لمائلا لعنصر x من \mathbb{Z} بالقانون T .

ليكن y مائلا x بالنسبة للقانون T . إذن :

$$x \top y = 3 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 = 3$$

$$\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow y(x - 2) = (2x - 3)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{(2x - 3)}{(x - 2)}$$

و نلاحظ أن الكمية $\frac{(2x - 3)}{(x - 2)}$ ليست دائما عنصرا من \mathbb{Z} .

العنصر $1 \in \mathbb{Z}$ مثلا هو مائلا 1 بالنسبة لـ T

و العنصر $3 \in \mathbb{Z}$ مثلا هو مائلا 3 بالنسبة لـ T

لكن العنصر $\frac{11}{5} \notin \mathbb{Z}$ هو مائلا 7 بالنسبة للقانون T .

إذن توجد عناصر من \mathbb{Z} لا تقبل مائلا في \mathbb{Z} بالنسبة لـ T .

و بالتالي فالحلقة $(\mathbb{Z}, *, T)$ ليست جسما .

التمرين الثاني

1

I

$$\Delta = a^2(3 + i\sqrt{3})^2 - 8a^2(1 + i\sqrt{3}) \text{ لدينا من جهة أولى :}$$

$$= a^2(6 + 6i\sqrt{3}) - 8a^2(1 + i\sqrt{3})$$

$$= 6a^2(1 + i\sqrt{3}) - 8a^2(1 + i\sqrt{3})$$

$$= -2a^2(1 + i\sqrt{3}) \quad (1)$$

$$a^2(-1 + i\sqrt{3})^2 = a^2(1 - 3 - 2i\sqrt{3}) \text{ و من جهة ثانية لدينا :}$$

$$= a^2(-2 - 2i\sqrt{3})$$

$$= -2a^2(1 + i\sqrt{3}) \quad (2)$$

نستنتج إذن من (1) و (2) أن : $\Delta = a^2(-1 + i\sqrt{3})^2$

2

I

$$\Delta = a^2(-1 + i\sqrt{3})^2 \text{ لدينا :}$$

إذن : المعادلة (E) تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 معرفين بما يلي :

$$z_1 = \frac{(3 + i\sqrt{3})a - (-1 + i\sqrt{3})a}{4}$$

$$= \frac{3a + i\sqrt{3}a + a - i\sqrt{3}a}{4} = \frac{4a}{4} = a$$

$$z_2 = \frac{(3 + i\sqrt{3})a + (-1 + i\sqrt{3})a}{4}$$

$$= \frac{3a + i\sqrt{3}a - a + i\sqrt{3}a}{4} = \frac{2a + 2i\sqrt{3}a}{4} = \frac{a(1 + i\sqrt{3})}{2}$$

و بنفس الطريقة لدينا : $OB_1 = |aff(B_1) - aff(O)| = |b_1|$

ولدينا كذلك : $A_1M = |aff(M) - aff(A_1)| = |z - a_1|$

$$\begin{aligned} &= \left| z - \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a - \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right| \\ &= \left| \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(1 - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right| \\ &= \left| \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right| = |b_1| \end{aligned}$$

إذن : $OB_1 = A_1M$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن كل ضلعين متقابلين في الرباعي OA_1MB_1 متقايسان . إذن : OA_1MB_1 متوازي أضلاع

أقترح طريقتين في الجواب .

الطريقة الأولى :

لدينا : $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$ إذن : $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$

و منه : $\left(\frac{b}{a} \right)^3 = -1$ يعني : $\left(\frac{b}{a} \right)^3 = \left(e^{\frac{i\pi}{3}} \right)^3 = e^{i\pi} = -1$

و منه : $\left(\frac{b}{a} \right)^2 = -\left(\frac{a}{b} \right)$ يعني : $\left(\frac{b}{a} \right)^2 \times \left(\frac{b}{a} \right) = -1$

و منه : $e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\left(\frac{a}{b} \right)$ إذن : $e^{\frac{2i\pi}{3}} = \left(e^{\frac{i\pi}{3}} \right)^2 = \left(\frac{b}{a} \right)^2 = -\left(\frac{a}{b} \right)$

نوظف بعد ذلك هذه المتساوية فيما سيأتي :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (a - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(a_1 - z) \\ (b_1 - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(b - z) \end{cases} \quad \text{إذن :} \quad \begin{cases} r(A_1) = A \\ r(B) = B_1 \end{cases} \\ &\begin{cases} (z - a_1) = e^{-\frac{i\pi}{3}}(z - a) \\ (z - b_1) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - b) \end{cases} \quad \text{يعني :} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{z - b_1}{z - a_1} \right) = \left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{-\frac{i\pi}{3}}} \right) \left(\frac{z - b}{z - a} \right) \quad \text{أي :}$$

$$\left(\frac{z - b_1}{z - a_1} \right) = e^{\frac{2i\pi}{3}} \left(\frac{z - b}{z - a} \right) \quad \text{يعني :}$$

$$\left(\frac{z - b_1}{z - a_1} \right) = \frac{-a}{b} \left(\frac{z - b}{z - a} \right) \quad \text{يعني :}$$

بإمكاننا أن نجيب دون استعمال المعطيين $r(A_1) = A$ و $r(B) = B_1$

و هذا ما سوف أعرضه الآن كطريقة أخرى للجواب .

الطريقة الثانية :

لدينا : $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$ إذن : $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ و $\frac{a}{b} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$

و من هاتين الكتابتين نستنتج ما يلي :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = e^{-\frac{i\pi}{3}} + e^{\frac{i\pi}{3}} = \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1 \quad \text{إذن :}$$

$$a_1 = \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a - \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z + z \quad \text{إذن :}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(1 - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$$

$$= \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$$

و بنفس الطريقة نطلق من الكتابة $r(B) = B_1$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران r نكتب :

$$(aff(B_1) - aff(M)) = e^{\frac{i\pi}{3}}(aff(B) - aff(M))$$

$$(b_1 - z) = e^{\frac{i\pi}{3}} \left(ae^{\frac{i\pi}{3}} - z \right) \quad \text{يعني :}$$

$$b_1 = ae^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}z + z \quad \text{يعني :}$$

$$e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{و لدينا :}$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{\frac{i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و نضيف كذلك :}$$

إذن بالرجوع إلى آخر تعبير لـ b_1 نكتب :

$$b_1 = ae^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}z + z = ae^{\frac{2i\pi}{3}} + \left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}} \right) z$$

$$= \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(1 - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$$

$$= \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$$

بصفة عامة ، لكي نبرهن على أن رباعيا ما متوازي أضلاع ، توجد عدة طرق من بينها : القطران لهما نفس المنتصف و صيغة التوازي و الصيغة المتجهية و صيغة التقاييس . لكن أرى أن أسهل طريقة في هذا السؤال هي أن نبرهن أن كل ضلعين متقابلين متقايسان . لأن المسافة في المستوى العقدي ما هي إلا معيار لعدد عقدي .



لنبرهن أن : $OB_1 = A_1M$ و $OA_1 = B_1M$

لدينا : $OA_1 = |aff(A_1) - aff(O)| = |a_1|$

و لدينا : $B_1M = |aff(M) - aff(B_1)| = |z - b_1|$

$$= \left| z - \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a - \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right|$$

$$= \left| \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(1 - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right|$$

$$= \left| \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right| = |a_1|$$

إذن : $OA_1 = B_1M$ (1)

II 3 ب

لنبين أن التكافؤ التالي صحيح .

$$A \text{ و } B \text{ و } O \text{ و } M \text{ نقط متداورة} \Leftrightarrow A_1 \text{ و } B_1 \text{ و } M \text{ نقط مستقيمة}$$

$$\text{لدينا : } \frac{z-b_1}{z-a_1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A_1 \text{ و } B_1 \text{ و } M \text{ نقط مستقيمة}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-a}{b} \left(\frac{z-b}{z-a} \right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} \left(\frac{z-b}{z-a} \right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{0-a}{0-b} \right) \times \left(\frac{z-b}{z-a} \right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ و } B \text{ و } O \text{ و } M \text{ نقط متداورة}$$

التمرين الثالث

1 أ

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1 بحيث : $3^n - 2^n = 0[n]$

إذن : n يقسم $(3^n - 2^n)$

و منه : $3^n - 2^n = mn$; $(\exists m \in \mathbb{N})$ (1) →

ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n .

إذن : $n = ps$; $(\exists s \in \mathbb{N})$ (2) →

من (1) و (2) نستنتج أن : $3^n - 2^n = msp$; $\epsilon \mathbb{N}$

إذن : p يقسم $(3^n - 2^n)$ يعني : $3^n - 2^n \equiv 0[p]$ (3) →
لكي نبرهن على أن $p \geq 5$ يكفي أن نُفَدَّ العبارتين $p = 2$ و $p = 3$

نفترض أن $p = 2$

لدينا حسب النتيجة (3) : $3^n - 2^n \equiv 0[p]$

إذن حسب الافتراض : $3^n - 2^n \equiv 0[2]$ (4) →

و نعلم أنه كيفما كان $n \in \mathbb{N}$ لدينا : $2^n \equiv 0[2]$ (5) →

نجمع المتوافقتين (4) و (5) طرفا بطرف : $3^n - 2^n + 2^n \equiv 0[2]$

يعني : $3^n \equiv 0[2]$ و منه : 2 يقسم 3^n أي : 2 يقسم $3 \times 3^{n-1}$

بما أن : $2 \wedge 3 = 1$ فإن $2 \wedge 3^{n-1} = 1$ (7) → $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

من (6) و (7) نستنتج إذن حسب (Gauss) أن : 2 يقسم 3

و هذا تناقض واضح . إذن : $p \neq 2$

نفترض أن $p = 3$

لدينا حسب النتيجة (3) : $3^n - 2^n \equiv 0[p]$

إذن حسب الافتراض نكتب : $3^n - 2^n \equiv 0[3]$ (8) →

و نعلم أن : $-3^n \equiv 0[3]$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ (9) →

نجمع المتوافقتين (8) و (9) طرفا بطرف : $3^n - 2^n - 3^n \equiv 0[3]$

يعني : $-2^n \equiv 0[3]$ أي : $2^n \equiv 0[3]$

يعني : 3 يقسم 2^n و منه : 3 يقسم $2 \times 2^{n-1}$ (10) →

بما أن : $2 \wedge 3 = 1$ فإن $2 \wedge 3^{n-1} = 1$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ (11) →

من (10) و (11) نستنتج حسب Gauss أن : 3 يقسم 2

و هذا تناقض واضح . إذن : $p \neq 3$

خلاصة السؤال أ :

إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1

و يحقق $3^n - 2^n \equiv 0[n]$ و كان p أصغر قواسمه الأولية الموجبة

فإن : $3^n - 2^n \equiv 0[p]$ و $p \geq 5$

$$\text{و لدينا كذلك : } \frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}} \text{ إذن : } \left(\frac{b}{a} \right)^3 = \left(e^{\frac{i\pi}{3}} \right)^3 = e^{i\pi} = -1$$

$$\text{إذن : } \left(\frac{b}{a} \right)^3 = -1$$

$$\text{و من هذه النتيجة نكتب : } \left(\frac{b}{a} \right)^2 \times \left(\frac{b}{a} \right) = -1$$

$$\text{يعني : } \left(\frac{b}{a} \right)^2 = -\left(\frac{a}{b} \right)$$

نحن الآن مُسلَّحون بمتساويتين ثمينتين :

$$(1) \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1 \quad \text{و} \quad (2) \quad \left(\frac{b}{a} \right)^2 = -\left(\frac{a}{b} \right)$$

ننطلق إذن من نتيجتي السؤال (2) أ) و نوظف المتساوية (1) :

$$\begin{cases} a_1 = \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \\ b_1 = \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = e^{-\frac{i\pi}{3}} a + e^{\frac{i\pi}{3}} z \\ b_1 = -e^{-\frac{i\pi}{3}} a + e^{-\frac{i\pi}{3}} z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \left(\frac{a}{b} \right) a + \left(\frac{b}{a} \right) z \\ b_1 = -\left(\frac{a}{b} \right) a + \left(\frac{a}{b} \right) z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{a^2}{b} + \frac{bz}{a} \\ b_1 = \frac{-a^2}{b} + \frac{az}{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - a_1 = z - \frac{a^2}{b} - \frac{bz}{a} \\ z - b_1 = z + \frac{a^2}{b} - \frac{az}{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - a_1 = \frac{-a^2}{b} + \left(1 - \frac{b}{a} \right) z \\ z - b_1 = \frac{a^2}{b} + \left(1 - \frac{a}{b} \right) z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - a_1 = \frac{-a^2}{b} + \left(\frac{a}{b} \right) z \\ z - b_1 = \frac{a^2}{b} + \left(\frac{b}{a} \right) z \end{cases}$$

فيما يلي سوف نوظف المتساوية الثمينة (2) :

$$\Leftrightarrow \frac{z - b_1}{z - a_1} = \frac{\frac{a^2}{b} + \frac{bz}{a}}{\frac{-a^2}{b} + \frac{az}{b}} = \frac{\left(\frac{a}{b} \right) \left(a + \left(\frac{b}{a} \right)^2 z \right)}{\left(\frac{a}{b} \right) (z - a)} = \frac{a - \frac{a}{b} z}{z - a}$$

$$= \frac{\left(\frac{-a}{b} \right) (-b + z)}{(z - a)} = \frac{-a}{b} \left(\frac{z - b}{z - a} \right)$$

$$\text{و بالتالي : } \left(\frac{z - b_1}{z - a_1} \right) = \frac{-a}{b} \left(\frac{z - b}{z - a} \right)$$

1 ب

نعلم أن p عدد أولي و يخالف العدد الأولي 2 إذن : $p \wedge 2 = 1$
و منه حسب Fermat : $2^{p-1} \equiv 1 [p]$
و بنفس الطريقة p عدد أولي يُخالف العدد الأولي 3 إذن : $p \wedge 3 = 1$
و منه حسب Fermat : $3^{p-1} \equiv 1 [p]$

1 ج

يكفي أن نبرهن على أن : $n \wedge (p-1) = 1$ ثم نستعمل Bezout .
في البداية وجب التذكير بخاصية قوية و مهمة تربط بين مفهوم التفكيك إلى جداء عوامل أولية و مفهوم القاسم المشترك الأكبر . و سوف أنكر بها باستعمال أمثلة فقط دون الخوض في متاهات الرموز الرياضية.

لاحظ الأمثلة التالية :

$$(2^3 \times 5^4 \times 7^6) \wedge (2^1 \times 5^6 \times 7^3 \times 11^2) = (2^1 \times 5^4 \times 7^3) \\ (2^5 \times 7^8) \wedge (3^4 \times 11^6) = 1 \\ (2^7 \times 3^4 \times 13) \wedge (13 \times 11^4) = 13 \\ (13^5 \times 2^7 \times 3^2) \wedge (5^5 \times 7 \times 11^2) = 1$$



بالعودة إلى السؤال ج) : ليكن $p^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_i^{\alpha_i}$ تفكيك العدد n إلى جداء عوامل أولية بحيث : $p < p_2 < \dots < p_i$
و ليكن $q^{r_1} \times q_2^{r_2} \times q_3^{r_3} \times \dots \times q_j^{r_j}$ تفكيك العدد $(p-1)$ إلى جداء عوامل أولية بحيث : $q < q_2 < \dots < q_j$
بما أن p هو أصغر قاسم أولي للعدد n و بما أن $(p-1) < p$ فإن : $q < q_1 < q_2 < \dots < q_j < p < p_2 < \dots < p_i$
نلاحظ أن الأعداد الأولية q كلها تخالف الأعداد الأولية p إذن :
 $(p^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_i^{\alpha_i}) \wedge (q^{r_1} \times q_2^{r_2} \times \dots \times q_j^{r_j}) = 1$
يعني : $n \wedge (p-1) = 1$

و منه حسب Bezout : $\exists (a, u) \in \mathbb{Z}^2 ; an + u(p-1) = 1$
نضع $b = -u$ إذن : $\exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2 ; an - b(p-1) = 1$ (12)

ملاحظة 1 : من هذه النتيجة الأخيرة يُمكن أن نستخرج باستعمال مبرهنة Besout العكسية ما يلي :

$$(*) \rightarrow \begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge (p-1) = 1 \\ n \wedge b = 1 \\ n \wedge (p-1) = 1 \end{cases}$$

خلاصة السؤال ج) : إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعاً من 1 و يحقق $[n] 3^n - 2^n \equiv 0$ و كان p أصغر قواسمه الأولية الموجبة فإنه يوجد عدنان نسبيين a و b بحيث : $an - b(p-1) = 1$

1 د

ليكن r و q على التوالي باقي و خارج القسمة الأقليدية لـ a على $(p-1)$.
$$\begin{cases} (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \\ a = q(p-1) + r \\ 0 \leq r < p-1 \end{cases}$$

ملاحظة 2 : قبل أن نجيب على السؤال د) لاحظ أنه بإمكاننا أن نبين أن $r > 0$ و سوف نحتاج هذه النتيجة فيما سيأتي .

لدينا : $r \geq 0$ إذن $r = 0$ أو $r > 0$.

نفترض أن $r = 0$ إذن : $a = q(p-1)$

يعني : $(p-1)$ يقسم a و منه : $a \wedge (p-1) = (p-1)$
إذن حسب النتيجة (*) : $(p-1) = 1$

يعني : $p = 2$. و هذا تناقض لأن $p \geq 5$
إذن : $0 < r < (p-1)$

نعود إذن ، بعد هذه الجولة المرححة مع r ، إلى السؤال د) .

و نطلق من التعبير التالي : $a = q(p-1) + r$
نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد n نحصل على :

$$an = qn(p-1) + rn$$

يعني : $rn = an - qn(p-1)$ (13)

و لدينا حسب النتيجة (12) : $an = 1 + b(p-1)$

نُعوض an بالتعبير $1 + b(p-1)$ في العلاقة (13) نجد :

$$rn = 1 + b(p-1) - qn(p-1)$$

$$أي : rn = 1 + (b - qn)(p-1)$$

$$نضع : k = (b - qn) \text{ إذن : } rn = 1 + k(p-1)$$

و لإتمام الجواب يكفي أن نُبرهن أن $k \in \mathbb{N}^*$

لدينا : $(b, q, n) \in \mathbb{Z}^3$ إذن : $k \in \mathbb{Z}$

و نُفصل هنا بين ثلاث حالات و هي : $k = 0$ أو $k < 0$ أو $k > 0$

نفترض أن : $k = 0$ إذن : $b = qn$

نُعوض إذن b بالقيمة qn في النتيجة (12) : $an - qn(p-1) = 1$

و منه حسب النتيجة (13) : $rn = 1$

أي : n يقسم 1 يعني : $n = 1$

و هذا **تناقض** لأن : $n > 1$ إذن : $k \neq 0$ (*)

نفترض أن : $k < 0$ إذن : $b < qn$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد السالب قطعاً $(p-1)$ - نجد :

$$-b(p-1) > -qn(p-1)$$

نُضيف إلى كلا الطرفين الكمية an نجد :

$$an - b(p-1) > an - qn(p-1)$$

إذن باستعمال النتيجة (12) و (13) نجد : $1 > rn$ (14)

و لدينا : $r > 0$ و $n > 1$ إذن : $rn > r$ (15)

من (14) و (15) نستنتج أن : $1 > rn > r$ يعني : $1 > r$

العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الأصغر من 1 هو الصفر .

إذن : $r = 0$ و هذا **تناقض** لأن $r \neq 0$ حسب **الملاحظة 2** .

إذن : $k > 0$ يعني : $k \in \mathbb{N}^*$

خلاصة السؤال د) : رأينا في هذا السؤال أنه إذا كان r و q على التوالي باقي و خارج القسمة الأقليدية للعدد a على العدد $(p-1)$ فإنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم k بحيث : $rn = 1 + k(p-1)$

أو بتعبير جميل : $(\exists k \in \mathbb{N}^*) ; rn = 1 + k(p-1)$ (16)

2

باستعمال البرهان بالخلف ، نفترض وجود عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعاً من 1 و يحقق : $[n] 3^n - 2^n \equiv 0$. و ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n .

$$\begin{cases} 2^{p-1} \equiv 1 [p] \\ 3^{p-1} \equiv 1 [p] \end{cases}$$

نطلق من النتيجة (1) :

$$\begin{cases} 2^{k(p-1)} \equiv 1 [p] \\ 3^{k(p-1)} \equiv 1 [p] \end{cases}$$

بما أن : $(k \in \mathbb{N}^*)$ فإن :

$$\begin{cases} -2 \times 2^{k(p-1)} \equiv -2 [p] \\ 3 \times 3^{k(p-1)} \equiv 3 [p] \end{cases}$$

و منه :

$$\begin{cases} -2^{1+k(p-1)} \equiv -2 [p] \\ 3^{1+k(p-1)} \equiv 3 [p] \end{cases}$$

يعني :



$$v'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \quad \text{و لدينا :}$$

- إذا كان $x = 1$: فإن $v'(x) = 0$
- إذا كان $x > 1$: فإن $v'(x) < 0$
- إذا كان $x < 1$: فإن $v'(x) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x + 1) = \ln(0^+) - 0 + 1 = -\infty - 0 + 1 = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right) \\ &= (+\infty)(0 - 1 + 0) = -\infty \end{aligned}$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة v كما يلي :

x	0	1	$+\infty$
$v'(x)$		0	-
v	$-\infty$	-2	$-\infty$

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن الدالة v :

- متصلة على المجال $]0; +\infty[$.
- تزايدية على المجال $]0; 1]$.
- تناقصية على المجال $]1; +\infty[$.
- $v(1) = -2$

إذن -2 قيمة قصوى للدالة v على المجال $]0; +\infty[$.

$$\forall x \in]0; +\infty[; v(x) \leq -2 < 0 \quad \text{يعني}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[; v(x) < 0 \quad \text{يعني}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[; \ln x - x + 1 < 0 \quad \text{يعني}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[; \ln x < x - 1 \quad \text{يعني}$$

$$]1; +\infty[\subset]0; +\infty[\quad \text{و بما أن :}$$

$$\forall x \in]1; +\infty[; \ln x < x - 1 \quad \text{فإن :}$$

$$h(x) = \frac{x-1}{x \ln x} \quad \text{ليكن } x \text{ عنصرا من المجال }]1; +\infty[\text{ . لدينا :}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{x \ln x - (x-1)(\ln x + 1)}{(x \ln x)^2} \\ &= \frac{x \ln x - (x \ln x + x - \ln x - 1)}{(x \ln x)^2} \\ &= \frac{\ln x - x + 1}{(x \ln x)^2} \end{aligned}$$

$$(\forall x > 1) ; (\ln x - x + 1) < 0 \quad \text{و نعلم أن :}$$

$$(\forall x > 1) ; (x \ln x)^2 > 0 \quad \text{و كذلك :}$$

$$(\forall x > 1) ; \frac{\ln x - x + 1}{(x \ln x)^2} < 0 \quad \text{إذن :}$$

$$(\forall x > 1) ; h'(x) < 0 \quad \text{يعني :}$$

أي أن الدالة h تناقصية قطعاً على المجال $]1; +\infty[$.

$$\begin{cases} -2^m \equiv -2 [p] \\ 3^m \equiv 3 [p] \end{cases} \quad \text{و منه باستعمال النتيجة (16) نكتب :}$$

$$(17) \Rightarrow 3^{rn} - 2^{rn} \equiv 1 [p] \quad \text{نجمع هاتين المتوافقتين طرفاً بطرف نجد :}$$

$$3^n - 2^n \equiv 0 [p] \quad \text{و لدينا حسب النتيجة (3) :}$$

$$3^n \equiv 2^n [p] \quad \text{إذن :}$$

$$3^{rn} \equiv 2^{rn} [p] \quad \text{و بما أن } (r \in \mathbb{N}^*) \text{ فإن :}$$

$$(18) \Rightarrow 2^{rn} - 3^{rn} \equiv 0 [p] \quad \text{و منه :}$$

نجمع المتوافقتين (17) و (18) طرفاً بطرف نجد :

$$3^{rn} - 2^{rn} + 2^{rn} - 3^{rn} \equiv 1 + 0 [p]$$

يعني : $0 \equiv 1 [p]$ يعني كذلك : $1 \equiv 0 [p]$ أي : p يقسم 1
و منه $p = 1$ لأن العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الذي يقسم 1 هو نفسه .

و هذا تناقض لأن $p \geq 5$ إذن n لا وجود له في $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

خلاصة التمرين بأكمله :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} ; 3^n - 2^n \not\equiv 0 [n]$$

التمرين الرابع

الجزء الأول

1 أ



$$\begin{cases} h(x) = \frac{x-1}{x \ln x} ; \forall x > 1 \\ h(1) = 1 \end{cases}$$

$$\text{نضع : } \varphi(x) = x \ln x$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x-1}{x \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\left(\frac{x \ln x}{x-1} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\left(\frac{x \ln x - 1 \ln 1}{x-1} \right)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\left(\frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} \right)} \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} \right)} = \frac{1}{\varphi'_d(1)} \end{aligned}$$

$$\text{و لدينا : } \varphi(x) = x \ln x \quad \text{إذن : } \varphi'(x) = \ln x + 1$$

$$\varphi'_d(1) = \varphi'_g(1) = \varphi'(x) = \ln(1) + 1 = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \frac{1}{\varphi'_d(1)} = \frac{1}{1} = 1 = h(1) \quad \text{و بالتالي :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = h(1) \quad \text{إذن :}$$

و هذا يعني أن الدالة h دالة متصلة على يمين 1

1 ب

نعتبر الدالة العددية v المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي :

$$v(x) = \ln x - x + 1$$

لندرس تغيرات الدالة v على المجال $]0; +\infty[$.

لدينا v عبارة عن تشكيلة منسجمة من الدوال المتصلة والقابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$. إذن v قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$.

1 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]1; +\infty[$.

$$\begin{aligned} g(x) - \ln 2 &= \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt \\ &= \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{t} \ln t} - \frac{1}{t \ln t} \right) dt \\ &= \int_x^{x^2} \left(\frac{\sqrt{t}}{t \ln t} - \frac{1}{t \ln t} \right) dt \\ &= \int_x^{x^2} \left(\frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} \right) dt \end{aligned}$$



1 ج

باستعمال تقنية تغيير المتغير نضع : $\sqrt{t} = u$

إذن : $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ يعني : $dt = 2u du$

• إذا كان $t = x$ فإن $u = \sqrt{x}$

• إذا كان $t = x^2$ فإن $u = x$

إذن آخر تكامل حصلنا عليه يصبح :

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2} \left(\frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} \right) dt &= \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{u - 1}{u^2 \ln(u^2)} \right) (2u du) \\ &= \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{u - 1}{2u^2 \ln u} \right) (2u du) \\ &= \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{u - 1}{u \ln u} \right) du \end{aligned}$$

إذن : $(\forall x > 1) ; g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{1}{u \ln u} \right) du$

Remarque : u et t sont des paramètres d'intégration qu'on peut schématiser comme des espaces mémoires temporels

2 أ

ليكن $x > 1$ و ليكن $t \in [\sqrt{x}; x]$

لدينا الدالة f تناقصية على المجال $]1; +\infty[$.

إذن فهي تناقصية على المجال $[\sqrt{x}; x]$ لأن $x > 1$.

بما أن : $\sqrt{x} \leq t \leq x$ فإن : $h(x) \leq h(t) \leq h(\sqrt{x})$

يعني : $h(x) \leq \left(\frac{t-1}{t \ln t} \right) \leq h(\sqrt{x})$

إذن : $\int_{\sqrt{x}}^x h(x) dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{t-1}{t \ln t} \right) dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x h(\sqrt{x}) dt$

يعني : $h(x) \int_{\sqrt{x}}^x 1 dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{t-1}{t \ln t} \right) dt \leq h(\sqrt{x}) \int_{\sqrt{x}}^x 1 dt$

يعني : $h(x) [t]_{\sqrt{x}}^x \leq \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{t-1}{t \ln t} \right) dt \leq h(\sqrt{x}) [t]_{\sqrt{x}}^x$

يعني : $h(x)(x - \sqrt{x}) \leq \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{t-1}{t \ln t} \right) dt \leq h(\sqrt{x})(x - \sqrt{x})$

و بالتالي حسب نتيجة السؤال ج) ($\forall x > 1$) نكتب :

$$(*) \quad h(x)(x - \sqrt{x}) \leq g(x) - \ln 2 \leq h(\sqrt{x})(x - \sqrt{x})$$

2 أ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x \ln x} \right) - \left(\frac{1}{x \ln x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln x} \right) - \left(\frac{1}{x \ln x} \right) = \left(\frac{1}{+\infty} \right) - \left(\frac{1}{+\infty} \right) = 0 \end{aligned}$$

نُخلص النتائج المتعلقة بالدالة h في الجدول التالي :

x	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	
h		

2 ب

نلاحظ حسب جدول تغيرات الدالة h أن الدالة h متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $]1; +\infty[$ بحيث :

$$h([1; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) ; h(1) \right[=]0; 1]$$

إذن : h تقابل من المجال $]1; +\infty[$ نحو المجال $]0; 1]$.

أي : $\forall x \in [1; +\infty[; \exists ! y \in]0; 1] : y = h(x)$

أو بتعبير آخر : $\forall x \in [1; +\infty[; \exists ! h(x) \in]0; 1]$

يعني : $(\forall x \geq 1) ; 0 < h(x) \leq 1$

الجزء الثاني

1 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]1; +\infty[$.

لاحظ في البداية أن : $(t \ln t)' = 1 + \ln t$

نستغل إذن هذه الملاحظة أثناء الحساب .

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt &= \int_x^{x^2} \left(\frac{1 + \ln t - \ln t}{t \ln t} \right) dt \\ &= \int_x^{x^2} \left(\frac{1 + \ln t}{t \ln t} \right) dt - \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{t} \right) dt \\ &= \int_x^{x^2} \frac{(t \ln t)'}{t \ln t} dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t} dt \\ &= [\ln(t \ln t)]_x^{x^2} - [\ln t]_x^{x^2} \\ &= (\ln(x^2 \ln(x^2)) - \ln(x \ln x)) - (\ln(x^2) - \ln x) \\ &= \ln \left(\frac{x^2 \ln(x^2)}{x \ln x} \right) - \ln \left(\frac{x^2}{x} \right) = \ln \left(\frac{2x^2 \ln(x)}{x \ln x} \right) - \ln(x) \\ &= \ln(2x) - \ln(x) = \ln \left(\frac{2x}{x} \right) = \ln 2 \end{aligned}$$

$$(\forall x > 1) ; \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2$$

و بالتالي :

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$(\forall x > 1) ; g(x) \geq \frac{h(x)(x - \sqrt{x}) + \ln 2}{x - 1}$$

$x \rightarrow +\infty$

$+\infty$

إذن حسب خاصية الترتيب و النهايات نستنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
 بالنسبة لنهاية $\frac{g(x)}{x}$ بجوار $+\infty$ ننطلق من التآطير الثمين المحصل عليه في
 السؤال (2) أ) كما سوف نستعمل أثناء الحساب النهاية المحصل عليها سابقا
 و هي : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ لدينا :

$$(x - \sqrt{x})h(x) + \ln 2 \leq g(x) \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x}) + \ln 2$$

نضرب طرفي هذا التآطير في العدد الموجب قطعاً $\frac{1}{x}$ نجد :

$$\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(x) + \frac{\ln 2}{x} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{x}$$

ثم نحسب نهايتي طرفي هذا التآطير بجوار $+\infty$ نحصل على :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(x) + \frac{\ln 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)h(x) + \frac{\ln 2}{x} \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{+\infty}}\right)(0) + \frac{\ln 2}{+\infty} = (1 - 0)(0) + 0 = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t = \sqrt{x}}} \left(1 - \frac{1}{t}\right)h(t) + \frac{\ln 2}{t^2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{+\infty}\right)(0) + \frac{\ln 2}{(+\infty)^2} = 0 \end{aligned}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(x) + \frac{\ln 2}{x} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{x}$$

$x \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow +\infty$

0 **0**

إذن حسب خاصية النهايات و الترتيب نستنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

2 ب

نضرب أطراف التآطير (*) في العدد الموجب قطعاً $\left(\frac{1}{x-1}\right)$ نجد :

$$\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}\right)h(x) \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x - 1} \leq \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}\right)h(\sqrt{x})$$

بعد ذلك نحسب نهايتي طرفي هذا التآطير على يمين 1 نجد :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}\right)h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}h(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\right)h(x) = \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1} + 1}\right)h(1) = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}\right)h(\sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\right)h(\sqrt{x}) \\ &= \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1} + 1}\right)h(\sqrt{1}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}\right)h(x) \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x - 1} \leq \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}\right)h(\sqrt{x})$$

$x \rightarrow 1^+$ $x \rightarrow 1^+$

$\frac{1}{2}$

و بالتالي : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{g(x) - g(1)}{x - 1}\right) = \frac{1}{2}$

أي أن الدالة g قابلة للإشتقاق على اليمين في 1 و $g'_d(1) = \frac{1}{2}$.

2 ج

لدينا حسب التآطير الوارد في السؤال (2) أ) :

$$(\forall x > 1) ; g(x) \geq h(x)(x - \sqrt{x}) + \ln 2$$

لنحسب نهاية $(x - \sqrt{x})h(x) + \ln 2$ بجوار $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})h(x) + \ln 2 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x})(x - 1)}{x \ln x} + \ln 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \frac{(x - 1)}{x \ln x} + \ln 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln x}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\frac{x - 1}{x}\right) + \ln 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{\ln x}{x}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \ln 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{0^+}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{+\infty}}\right) \left(1 - \frac{1}{+\infty}\right) + \ln 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (+\infty)(1 - 0)(1 - 0) + \ln 2 \\ &= (+\infty)(1)(1) + \ln 2 = +\infty \end{aligned}$$



3 ب

لدينا حسب نتيجة السؤال (2) ب) من الجزء الأول :

$$(\forall x \geq 1) ; 0 < h(x) \leq 1$$

نلاحظ أن : $x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1$

إذن : $(\forall x \geq 1) ; 0 < h(\sqrt{x}) \leq 1$

ومنه : $(\forall x \geq 1) ; 0 < \frac{1}{2} h(\sqrt{x}) \leq \frac{1}{2}$

يعني : $(\forall x \geq 1) ; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$

و من هذه الكتابة نستنتج أن g دالة تزايدية قطعاً على المجال $]1; +\infty[$.
و لإنشاء جدول تغيرات g نستدعي النتائج التي حصلنا عليها من قبل و هي :

■ g معرفة و متصلة على $]1; +\infty[$

■ g تزايدية قطعاً على $]1; +\infty[$

■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

■ $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1) = \ln 2$

نرسم إذن جدول تغيرات g كما يلي :

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		+
g	$\ln 2$	$+\infty$

الجزء الثالث

1 ا

ليكن x عنصراً من المجال $]1; +\infty[$.

لدينا : $k(x) = g(x) - x + 1$

بما أن g قابلة للاشتقاق على المجال $]1; +\infty[$

فان k قابلة للاشتقاق على $]1; +\infty[$ و لدينا : $k'(x) = g'(x) - 1$

لدينا حسب نتيجة السؤال (3) ب) من الجزء الثاني :

$$(\forall x \geq 1) ; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$$

3 ا

أذكر في البداية بما يلي : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و كان a عنصراً من المجال I . فإن f تقبل عدة دوال أصلية على المجال I و بالخصوص تقبل دالة أصلية F التي تتعدم في a و تحقق :

$$\begin{cases} F(a) = 0 \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$$

$$F : I \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

انتهى التذكير

ليكن a عنصراً من المجال $]1; +\infty[$.

نعتبر الدالة العددية u المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بما يلي :

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \ln x}$$

نلاحظ أن u دالة متصلة على $]1; +\infty[$

و ذلك حسب المبرهنات العامة للاتصال .

إذن : u تقبل عدة دوال أصلية على $]1; +\infty[$ و بالخصوص u تقبل دالة أصلية v التي تتعدم في a و معرفة بما يلي :

$$\begin{cases} v(a) = 0 \\ v'(x) = u(x) \end{cases}$$

$$v :]1; +\infty[\mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x u(t) dt$$

و بالتالي بالرجوع إلى تعريف الدالة g نكتب :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt ; x > 1 \\ &= \int_x^a \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt + \int_a^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt \\ &= \int_a^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt - \int_a^x \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt \\ &= v(x^2) - v(x) \end{aligned}$$

نحصل إذن على العلاقة التالية : $g(x) = v(x^2) - v(x) ; x > 1$
انطلاقاً من الدوال $x \mapsto x$ و v و $x \mapsto x^2$ نستطيع القول ، باستعمال المبرهنات العامة لاشتقاق مركب دالتين ، أن g قابلة للاشتقاق على المجال $]1; +\infty[$.

و لدينا : $(\forall x > 1) ; g'(x) = (v(x^2) - v(x))'$

$$= 2x v'(x^2) - v'(x)$$

$$= 2x u(x^2) - u(x)$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2} \ln(x^2)} - \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} = \frac{2x}{2x \ln x} - \frac{1}{\sqrt{x} \ln x}$$

$$= \frac{x}{x \ln x} - \frac{\sqrt{x}}{x \ln x} = \frac{x - \sqrt{x}}{x \ln x} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x})^2 \ln(\sqrt{x}^2)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} \ln \sqrt{x}} \right) = \frac{1}{2} h(\sqrt{x})$$

و بالتالي : $(\forall x > 1) ; g'(x) = \frac{1}{2} h(\sqrt{x})$

1 II ج

لدينا $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية تزايدية قطعاً .
و بما أنها مكبورة بالعدد α (لأن $u_n < \alpha$; $\forall n \geq 0$) حسب (أ) :
فإنها مقاربة و نهايتها ℓ تحقق : $1 + g(\ell) = \ell$
و رأينا أن هذه المعادلة تقبل حلاً وحيداً في المجال $[1; +\infty[$ و هو α .
إذن : $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \alpha$

2 II أ

نعتبر الدالة العددية ψ المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بما يلي :
بما أن g قابلة للإشتقاق على المجال $[1; +\infty[$.
فإن ψ قابلة للإشتقاق على المجال $[1; +\infty[$.
و منه ψ قابلة للإشتقاق على أي مجال يوجد ضمن $[1; +\infty[$.
نختار المجال $[u_n; \alpha]$ الذي يوجد ضمن $[1; +\infty[$ (و ذلك لأن : $1 \leq u_n < \alpha$; $\forall n \geq 0$)
إذن بتطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية (TAF)
على الدالة ψ في المجال $[u_n; \alpha]$ نجد :

$$\exists c \in]u_n; \alpha[; \frac{\psi(u_n) - \psi(\alpha)}{u_n - \alpha} = \psi'(c)$$

$$\begin{cases} \psi(u_n) = 1 + g(u_n) = u_{n+1} \\ \psi(\alpha) = 1 + g(\alpha) = \alpha \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$\exists c \in]u_n; \alpha[; \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} = \psi'(c) \quad \text{إذن :}$$

$$\text{يعني : } \exists c \in]u_n; \alpha[; \left| \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} \right| = |\psi'(c)| \quad (*)$$

$$\text{لدينا : } \psi'(c) = g'(c) \quad \text{و } c \in]u_n; \alpha[\quad \text{و } c \geq 1$$

$$\text{إذن : } 1 \leq u_n < c < \alpha \quad \text{أي :}$$

$$\text{و منه حسب نتيجة السؤال (3) ب) من الجزء الثاني : } 0 < g'(c) \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{إذن : } |\psi'(c)| = |g'(c)| \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{أي : } |\psi'(c)| \leq \frac{1}{2} \quad (**)$$

إذن باستعمال الكتابتين (*) و (**) نكتب :

$$(\forall n \geq 0) ; \left| \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} \right| \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{يعني : } (\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$



إذن : $(\forall x \geq 1) ; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2} < 1$

يعني : $(\forall x \geq 1) ; g'(x) < 1$

و منه : $(\forall x \geq 1) ; g'(x) - 1 < 0$

أي : $(\forall x \geq 1) ; k'(x) < 0$

و هذا يعني أن الدالة k تناقصية قطعاً على المجال $[1; +\infty[$.

إذن k تقابل من المجال $[1; +\infty[$ نحو صورته بالدالة k .

$$\text{و لدينا } k([1; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) ; k(1) \right[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(x)}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$= \left(0 - 1 + \frac{1}{+\infty} \right) (+\infty) = (-1)(+\infty) = -\infty$$

و بالتالي : k تقابل من المجال $[1; +\infty[$ نحو المجال $] -\infty; \ln 2]$.

2 I

لدينا : $\ln 2 > 0$ إذن : $0 \in] -\infty; \ln 2]$

و بما أن k تقابل من $[1; +\infty[$ نحو $] -\infty; \ln 2]$

فإن الصفر يمتلك سابقاً واحداً بالدالة k في المجال $[1; +\infty[$.

يعني بتعبير آخر : $\exists ! \alpha \in [1; +\infty[; k(\alpha) = 0$

يعني : $\exists ! \alpha \in [1; +\infty[; g(\alpha) - \alpha + 1 = 0$

يعني : $\exists ! \alpha \in [1; +\infty[; 1 + g(\alpha) = \alpha$

أو بتعبير لطيف : المعادلة $1 + g(x) = x$ تقبل حلاً وحيداً

في المجال $[1; +\infty[$ و هو α .

1 II أ

باستعمال البرهان بالترجع ، نعتبر العبارة (P_n) التالية :

$$(P_n) : (\forall n \geq 0) ; 1 \leq u_n < \alpha$$

من أجل $n = 0$ لدينا حسب المعطيات : $1 \leq u_0 < \alpha$

إذن : العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و نفترض أن : $1 \leq u_n < \alpha$

نُدخل على هذا التأطير الدالة التزايدية قطعاً g نحصل على :

$$g(1) \leq g(u_n) < g(\alpha)$$

ثم نضيف 1 لكل طرف : $g(1) + 1 \leq g(u_n) + 1 \leq g(\alpha) + 1$

إذن : باستعمال النتائج السابقة نكتب : $1 < \ln 2 + 1 \leq u_{n+1} < \alpha$

يعني : $1 \leq u_{n+1} < \alpha$ إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

حصلنا إذن على الوضعية التالية : $(P_0) \text{ est vraie}$

$$(P_n) \text{ implique } (P_{n+1}) ; \forall n \geq 0$$

و بالتالي حسب مبدأ التراجع : $(P_n) \text{ est toujours vraie}$

أي : $(\forall n \geq 0) ; 1 \leq u_n < \alpha$

1 II ب

لدينا حسب آخر نتيجة : $(\forall n \geq 0) ; u_n < \alpha$

نُدخل الدالة التناقصية قطعاً k على هذه متفاوتة نجد :

$$(\forall n \geq 0) ; k(u_n) > k(\alpha)$$

و بما أن : $k(\alpha) = 0$ فإن : $k(u_n) > 0$; $(\forall n \geq 0)$

يعني : $(\forall n \geq 0) ; g(u_n) - u_n + 1 > 0$

يعني : $(\forall n \geq 0) ; 1 + g(u_n) > u_n$

و منه : $(\forall n \geq 0) ; u_{n+1} > u_n$

و من هذه الكتابة نستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعاً .



II 2 ب

لدينا : $(\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$
 إذن بتغيير $(n+1)$ بـ n نجد : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha|$
 $\leq \frac{1}{2} \frac{1}{2} |u_{n-2} - \alpha|$
 $\leq \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} |u_{n-3} - \alpha|$
 \vdots
 $\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_{n-n} - \alpha|$

إذن : $(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$
 و يمكن كذلك استعمال البرهان بالترجع .

لنبرهن بالترجع على أن : $(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$
 من أجل $n = 0$ لدينا : $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha|$
 إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و نفترض أن : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$
 نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $\frac{1}{2}$ نجد :

$(\forall n \geq 0) ; \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$
 بما أن : $(\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$
 فإن : $(\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$
 و هذا يعني أن العبارة صحيحة من أجل $(n+1)$.
 و بالتالي حسب مبدأ التراجع :

$(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

II 2 ج

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها عدد موجب قطعاً و أصغر من 1 .

إذن : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ و منه : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$
 نحصل إذن على الوضعية التالية :

$(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$
 \searrow
 0

أو بتعبير واضح نحصل على الوضعية التالية :

$(\forall n \geq 0) ; -\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq (u_n - \alpha) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$
 \searrow \searrow
 0 0

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - \alpha) = 0$
 أي : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha$