

إذن f تشكل من (\mathbb{Z}, \times) نحو (\mathbb{Z}, \top) .
لكي يكون f تقابل يكفي أن يتحقق ما يلي :

$$(\forall y \in \mathbb{Z}), (\exists! x \in \mathbb{Z}) ; f(x) = y$$

يعني : المعادلة $f(x) = y$ ذات المجهول x تقبل حلًا وحيدًا في \mathbb{Z} .

$$f(x) = y \Leftrightarrow x + 2 = y \Leftrightarrow x = y - 2 \in \mathbb{Z}$$

$$(\forall y \in \mathbb{Z}), (\exists! x \in \mathbb{Z}) ; f(x) = y$$

إذن : وهذا يعني أن التطبيق f تقابل من \mathbb{Z} نحو (\mathbb{Z}, \top) .

خلاصة : f تشكل تقابل من (\mathbb{Z}, \times) نحو (\mathbb{Z}, \top) .

2

لتكن x و y و z ثلاثة أعداد نسبية ، لدينا من جهة أولى :

$$(x * y) \top z = (x * y)z - 2(x * y) - 2z + 6$$

$$= (x + y - 2)z - 2(x + y - 2) - 2z + 6$$

$$= xz + yz - 4z - 2x - 2y - 2z + 10$$

$$(x \top z) * (y \top z) = (x \top z) + (y \top z) - 2$$

$$= (xz - 2x - 2z + 6) + (yz - 2y - 2z + 6) - 2$$

$$= xz + yz - 4z - 2x - 2y - 2z + 10$$

نستنتج أن : $(x * y) \top z = (x \top z) * (y \top z)$ أي : القانون \top توزيعي على $*$ في \mathbb{Z} .

3

لتبين أن : $(\mathbb{Z}, *, \top)$ حلقة تبادلية و وحدية

\top يقبل عنصرا محايدا في \mathbb{Z}

\top زمرة تبادلية
قانون تجمعي
 \top توزيعي على $*$

\top تبادلية في \mathbb{Z}

حصلنا من خلال الأوجبة السابقة على المعلوماتين التاليتين :

(2) القانون \top زمرة تبادلية (1) و القانون \top توزيعي على القانون $*$

لدينا f تشكل تقابل من (\mathbb{Z}, \times) نحو (\mathbb{Z}, \top) .

إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة (\mathbb{Z}, \top) انتفاها من البنية الجبرية للمجموعة (\mathbb{Z}, \times) و ذلك عن طريق التطبيق f .

لأنه و كما نعلم : التشكل التقابل يُحول البنية الجبرية لمجموعة الأنطلاقة إلى مجموعة الوصول .

بما أن الضرب \times تبادلي و تجمعي في (\mathbb{Z}, \times) و يقبل 1 كعنصر محايد .

(4) فإن : القانون \top تبادلية في \mathbb{Z} و قانون تجمعي في \mathbb{Z}

و $3 = f(1)$ عنصر محايد للقانون \top في \mathbb{Z} (5)

إذن من النتائج (1) و (2) و (3) و (4) و (5) نستنتج أن $(\mathbb{Z}, *, \top)$ حلقة تبادلية و وحدية وحدتها العدد النسبي 3 .

4

ليكن x و y عنصرين من المجموعة \mathbb{Z} . لدينا :

$$x \top y = 2 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 = 2$$

$$\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y - 2) - 2(y - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 2)(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 2) = 0 \text{ أو } (x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \text{ أو } x = 2$$



التمرين الأول

1

المجموعة \mathbb{Z} مزودة بالقانون * المعرف بما يلي :

$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; x * y = x + y - 2$

لدينا * قانون تركيب داخلي لأنه إذا كان x و y عنصرين من \mathbb{Z}

فإن $(x + y - 2) \in \mathbb{Z}$:

نبرهن على أن تبادلي :

من أجل ذلك يكفي أن نلاحظ أن القانون + تبادلي في الحالة

الواحدية التبادلية $(\mathbb{Z}, +, \times)$:

إذن : $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; x * y = x + y - 2 = y + x - 2 = y * x$

إذن * تبادلي في \mathbb{Z} .

نبرهن على أن القانون * تجمعي في \mathbb{Z} :

لتكن x و y و z ثلاثة عناصر من \mathbb{Z} :

لدينا : $(x * y) * z = (x * y) + z - 2 = x + y - 2 + z - 2$

$$= x + (y + z - 2) - 2$$

$$= x + (y * z) - 2$$

$$= x * (y * z)$$

إذن : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 ; (x * y) * z = x * (y * z)$

و منه فإن القانون * تجمعي في المجموعة \mathbb{Z} .

2

ليكن ϵ العنصر المحايد للقانون * في المجموعة \mathbb{Z} .

إذن : $\forall x \in \mathbb{Z} ; x * \epsilon = \epsilon * x = x$

لتحديد قيمة ϵ ننطلق من التعبير :

إذن : $\epsilon = 2 \in \mathbb{Z}$ و منه :

إذن 2 هو العنصر المحايد للقانون * في \mathbb{Z} .

3

لكي تكون (\mathbb{Z}, \top) زمرة تبادلية يكفي أن نبرهن على أن كل عنصر من \mathbb{Z} يقبل مماثلا من \mathbb{Z} بالقانون * .

ليكن x عنصرا من \mathbb{Z} . و x' مماثله بالنسبة للقانون * .

إذن : $x * x' = x' * x = 2$

ننطلق من المتساوية التالية :

إذن : $x' = 4 - x$ يعني :

بما أن $x \in \mathbb{Z}$ و $4 \in \mathbb{Z}$ فإن :

و وبالتالي : كل عنصر x من \mathbb{Z} يقبل مماثلا في \mathbb{Z} و هو $(4 - x)$.

خلاصة : لقد حصلنا على المعلومات التالية :

* داخلي و تبادلي و تجمعي في \mathbb{Z} .

* يقبل عنصرا مماثلا و هو 2 .

كل عنصر x من \mathbb{Z} يمتلك مماثلا و هو $(4 - x)$.

إذن : (\mathbb{Z}, \top) زمرة تبادلية .

4

نعتبر التطبيق f المعرف بما يلي :

$$f : (\mathbb{Z}, \times) \rightarrow (\mathbb{Z}, \top)$$

$$x \mapsto f(x) = x + 2$$

لكي يكون f تشكلا يكفي أن يتحقق ما يلي :

$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; f(x \times y) = f(x) \top f(y)$

ليكن x و y عنصرين من المجموعة \mathbb{Z} .

لدينا : $f(x) \top f(y) = (x + 2) \top (y + 2)$

$= (x + 2)(y + 2) - 2(x + 2) - 2(y + 2) + 6$

$$= xy - 2 = f(x \times y)$$

1

II

اقترح طريقتين في الجواب .

الطريقة الأولى :

$$\frac{aff(A) - aff(0)}{aff(B) - aff(0)} = \frac{a - 0}{ae^{\frac{i\pi}{3}} - 0} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

لدينا :

$$\left\{ \begin{array}{l} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \right) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \end{array} \right. \text{يعني :} \left\{ \begin{array}{l} \frac{OA}{OB} = 1 \\ \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \right) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \end{array} \right.$$

لدينا :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{aff(A) - aff(0)}{aff(B) - aff(0)} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{aff(A) - aff(0)}{aff(B) - aff(0)} \right) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \end{array} \right.$$

لدينا :

و هذا يعني أن المثلث OAB متساوي الساقين رأسه O و قياس إحدى زواياه و هي الزاوية \hat{O} يساوى 60° .
لدينا :

الطريقة الثانية :

$$OA = |aff(A) - aff(0)| = |a - 0| = |a|$$

لدينا :

$$OB = |aff(B) - aff(0)|$$

لدينا :

$$= |b - 0| = \left| ae^{\frac{i\pi}{3}} \right| = |a|$$

$$AB = |aff(B) - aff(A)| = |b - a|$$

و كذلك :

$$= \left| ae^{\frac{i\pi}{3}} - a \right| = \left| a \left(e^{\frac{i\pi}{3}} - 1 \right) \right| = |a| \cdot \left| e^{\frac{i\pi}{3}} - 1 \right|$$

$$= |a| \cdot \left| \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right| = |a| \cdot \left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = |a|$$

$$A \neq B \neq C \quad \text{و} \quad OA = OB = AB$$

لدينا :

لدينا r دوران معرف بما يلي :

$$r_M \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

$(P) \xrightarrow{r_M \left(\frac{\pi}{3} \right)} (P)$

$$r(A_1) = A \quad \text{لدينا :} \quad A_1 = r^{-1}(A)$$

و منه حسب التعريف العقدي للدوران r نكتب :

$$(aff(A) - aff(M)) = e^{\frac{i\pi}{3}} (aff(A_1) - aff(M))$$

$$(a - z) = e^{\frac{i\pi}{3}} (a_1 - z) \quad \text{يعني :}$$

$$(a - z) = e^{\frac{i\pi}{3}} a_1 - e^{\frac{i\pi}{3}} z \quad \text{يعني :}$$

$$e^{\frac{i\pi}{3}} a_1 = a - z + e^{\frac{i\pi}{3}} z \quad \text{يعني :}$$

$$a_1 = e^{\frac{-i\pi}{3}} \left(a - z + e^{\frac{i\pi}{3}} z \right) \quad \text{يعني :}$$

$$a_1 = e^{\frac{-i\pi}{3}} a - e^{\frac{-i\pi}{3}} z + z \quad \text{يعني :}$$

$$e^{\frac{-i\pi}{3}} = \cos \left(\frac{-\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{3} \right) \quad \text{من جهة أخرى لدينا :}$$

$$= \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$



● 4 ●

تكون الحلقة $(\mathbb{Z}, *, \tau)$ كاملة إذا كانت لا تحتوي على قواسم للصفر .
ليكن x قاسما للصفر في $(\mathbb{Z}, *, \tau)$.

إذن : $\exists y \in \mathbb{Z} \setminus \{2\} : x \tau y = y \tau x = 2$
و منه حسب نتيجة السؤال (4) : $x = 2$ أو $y = 2$
إذن لا يوجد لأي قاسم للصفر لأن قواسم الصفر إن وجدت يجب أن تختلف العنصر المحايد 2 وبالتالي $(\mathbb{Z}, *, \tau)$ حلقة كاملة .



تكون الحلقة الواحدية $(\mathbb{Z}, *, \tau)$ جسما إذا كان كل عنصر من $\mathbb{Z} \setminus \{2\}$ يقبل مماثلا (أو مقلوبا) في (\mathbb{Z}, τ) .

و لذلك نحدد أولا الصيغة العامة لمماثل عنصر x من \mathbb{Z} بالقانون τ :
ليكن y مماثل x بالنسبة للقانون τ . إذن :

$$\begin{aligned} x \tau y &= 3 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 = 3 \\ &\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow y(x - 2) = (2x - 3) \\ &\Leftrightarrow y = \left(\frac{2x - 3}{x - 2} \right) \end{aligned}$$

و نلاحظ أن الكمية $\left(\frac{2x - 3}{x - 2} \right)$ ليست دائما عنصرا من \mathbb{Z} .

العنصر $1 \in \mathbb{Z}$ مثلا هو مماثل 1 بالنسبة لـ τ

و العنصر $3 \in \mathbb{Z}$ مثلا هو مماثل 3 بالنسبة لـ τ

لكن العنصر $\frac{11}{5} \notin \mathbb{Z}$ هو مماثل 7 بالنسبة لـ τ .

إذن توجد عناصر من \mathbb{Z} لا تقبل مماثلا في \mathbb{Z} بالنسبة لـ τ .

و وبالتالي فالحلقة $(\mathbb{Z}, *, \tau)$ ليست جسما .

● 2 ●

التمرين الثاني

● 1 ●

$$\begin{aligned} \Delta &= a^2 (3 + i\sqrt{3})^2 - 8a^2 (1 + i\sqrt{3}) \\ &= a^2 (6 + 6i\sqrt{3}) - 8a^2 (1 + i\sqrt{3}) \\ &= 6a^2 (1 + i\sqrt{3}) - 8a^2 (1 + i\sqrt{3}) \\ &= -2a^2 (1 + i\sqrt{3}) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 (-1 + i\sqrt{3})^2 &= a^2 (1 - 3 - 2i\sqrt{3}) \\ &= a^2 (-2 - 2i\sqrt{3}) \\ &= -2a^2 (1 + i\sqrt{3}) \quad (2) \end{aligned}$$

نستنتج إذن من (1) و (2) أن :

● 2 ●

$$\begin{aligned} \Delta &= a^2 (-1 + i\sqrt{3})^2 \\ \text{لدينا :} \quad \Delta &= a^2 (-1 + i\sqrt{3})^2 \end{aligned}$$

إذن : المعادلة (E) تقبل حلين عقبيان z_1 و z_2 معرفين بما يلي :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(3 + i\sqrt{3})a - (-1 + i\sqrt{3})a}{4} \\ &= \frac{3a + i\sqrt{3}a + a - i\sqrt{3}a}{4} = \frac{4a}{a} = a \\ z_2 &= \frac{(3 + i\sqrt{3})a + (-1 + i\sqrt{3})a}{4} \\ &= \frac{3a + i\sqrt{3}a - a + i\sqrt{3}a}{4} = \frac{2a + 2i\sqrt{3}a}{4} = \frac{a(1 + i\sqrt{3})}{2} \end{aligned}$$

$$OB_1 = |aff(B_1) - aff(O)| = |b_1|$$

$$A_1M = |aff(M) - aff(A_1)| = |z - a_1|$$

$$= \left| z - \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a - \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right|$$

$$= \left| \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(1 - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right|$$

$$= \left| \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right| = |b_1|$$

إذن : (2) $OB_1 = A_1M$

من (1) و (2) نستنتج أن كل ضلعين متقابلين في الرباعي OA_1MB_1 متوازي أضلاع متقابيان . إذن : OA_1MB_1 متوازي أضلاع

أقترح طريقتين في الجواب .

الطريقة الأولى :

$$\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}} \quad \text{إذن : } b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$\left(\frac{b}{a} \right)^3 = -1 \quad \text{يعني : } \left(\frac{b}{a} \right)^3 = \left(e^{\frac{i\pi}{3}} \right)^3 = e^{i\pi} = -1 \quad \text{و منه :}$$

$$\left(\frac{b}{a} \right)^2 = -\left(\frac{a}{b} \right) \quad \text{يعني : } \left(\frac{b}{a} \right)^2 \times \left(\frac{b}{a} \right) = -1 \quad \text{و منه :}$$

$$e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\left(\frac{a}{b} \right) \quad \text{إذن : } e^{\frac{2i\pi}{3}} = \left(e^{\frac{i\pi}{3}} \right)^2 = \left(\frac{b}{a} \right)^2 = -\left(\frac{a}{b} \right) \quad \text{و منه :}$$

نلاحظ بعد ذلك هذه المتساوية فيما سيأتي :

$$\begin{cases} (a - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(a_1 - z) \\ (b_1 - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(b - z) \end{cases} \quad \text{إذن : } \begin{cases} r(A_1) = A \\ r(B) = B_1 \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{cases} (z - a_1) = e^{-\frac{i\pi}{3}}(z - a) \\ (z - b_1) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - b) \end{cases} \quad \text{يعني :}$$

$$\left(\frac{z - b_1}{z - a_1} \right) = \left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{-\frac{i\pi}{3}}} \right) \left(\frac{z - b}{z - a} \right) \quad \text{أي :}$$

$$\left(\frac{z - b_1}{z - a_1} \right) = e^{\frac{2i\pi}{3}} \left(\frac{z - b}{z - a} \right) \quad \text{يعني :}$$

$$\left(\frac{z - b_1}{z - a_1} \right) = \frac{-a}{b} \left(\frac{z - b}{z - a} \right) \quad \text{يعني :}$$

بامكاننا أن نجيب دون استعمال المعطيين $r(B) = B_1$ و $r(A_1) = A$

و هذا ما سوف أعرضه الآن كطريقة أخرى للجواب .

الطريقة الثانية :

$$\frac{a}{b} = e^{\frac{-i\pi}{3}} \quad \text{و } \frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}} \quad \text{إذن : } b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$$

و من هاتين الكتابتين نستنتج ما يلي :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = e^{\frac{-i\pi}{3}} + e^{\frac{i\pi}{3}} = \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1 \quad \text{إذن :}$$

$$a_1 = \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a - \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z + z$$

$$= \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(1 - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$$

$$= \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$$

و بنفس الطريقة ننطلق من الكتابة $r(B) = B_1$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران r نكتب :

$$(aff(B_1) - aff(M)) = e^{\frac{i\pi}{3}}(aff(B) - aff(M))$$



$$(b_1 - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(ae^{\frac{i\pi}{3}} - z) \quad \text{يعني :}$$

$$b_1 = ae^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}z + z \quad \text{يعني :}$$

$$e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{لدينا :}$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{\frac{i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و نضيف ذلك :}$$

إذن بالرجوع إلى آخر تعبير b_1 نكتب :

$$b_1 = ae^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}z + z = ae^{\frac{2i\pi}{3}} + \left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}} \right) z$$

$$= \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(1 - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$$

$$= \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$$



بصفة عامة ، لكي نبرهن على أن رباعيا ما متوازي أضلاع ، توجد عدة طرق من بينها : القطران لهما نفس المنتصف و صيغة التوازي و الصيغة المتوجهة و صيغة التقابس . لكن أرى أن أسهل طريقة في هذا السؤال هي أن نبرهن أن كل ضلعين متقابلين متقابيان . لأن المسافة في المستوى العقدي ما هي إلا معيار لعدد عقدي .



لنبرهن أن : $OB_1 = A_1M$ و $OA_1 = B_1M$

لدينا : $OA_1 = |aff(A_1) - aff(O)| = |a_1|$

و لدينا : $B_1M = |aff(M) - aff(B_1)| = |z - b_1|$

$$= \left| z - \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a - \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right|$$

$$= \left| \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(1 - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right|$$

$$= \left| \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right| = |a_1|$$

إذن : (1) $OA_1 = B_1M$



لنبين أن التكافؤ التالي صحيح .

M و B_1 و A_1 و M نقط مستقيمية \Leftrightarrow M و O و B و A نقط متداورة

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \frac{z - b_1}{z - a_1} \in \mathbb{R} \quad \text{لدينا :} \\
 &\Leftrightarrow \frac{-a(z - b)}{b(z - a)} \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow \frac{a(z - b)}{b(z - a)} \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{0 - a}{0 - b}\right) \times \left(\frac{z - b}{z - a}\right) \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow \text{نقط متداورة}
 \end{aligned}$$

التمرين الثالث



ل يكن n عدداً صحيحاً طبيعياً أكبر قطعاً من 1 بحيث : $3^n - 2^n = 0 [n]$.

إذن : n يقسم $(3^n - 2^n)$ و منه : $(\exists m \in \mathbb{N})$; $3^n - 2^n = mn$.

ل يكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n .

إذن : $(\exists s \in \mathbb{N})$; $n = ps$.

من (1) و (2) نستنتج أن : $3^n - 2^n = ms p$.

إذن : p يقسم $(3^n - 2^n)$ يعني : $p \neq 2$.

لدينا حسب النتيجة (3) .

(4) $\Rightarrow 3^n - 2^n \equiv 0 [2]$.

و نعلم أنه كيما كان $n \in \mathbb{N}$ لدينا : $3^n - 2^n + 2^n \equiv 0 [2]$.

نجمع المتواافقين (4) و (5) طرفاً بطرف : $3 \times 3^{n-1} \equiv 0 [2]$.

يعني : $3^n \equiv 0 [2]$ و منه : 2 يقسم 3^n أي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

بما أن : $2 \wedge 3^{n-1} = 1$ فإن $2 \wedge 3 = 1$.

من (6) و (7) نستنتج إذن حسب (Gauss) أن : 2 يقسم 3 .

و هذا تناقض واضح . إذن :

$p = 3$.

لدينا حسب النتيجة (3) .

(8) $\Rightarrow 3^n - 2^n \equiv 0 [3]$.

و نعلم أن : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $-3^n \equiv 0 [3]$.

نجمع المتواافقين (8) و (9) طرفاً بطرف : $3^n - 2^n - 3^n \equiv 0 [3]$.

يعني : $2^n \equiv 0 [3]$ أي :

يعني : 3 يقسم 2^n و منه : 3 يقسم $2 \times 2^{n-1}$.

(10) $\Rightarrow 2 \times 2^{n-1} \wedge 3 = 1$.

بما أن : $2 \wedge 3 = 1$ فإن :

من (10) و (11) نستنتج حسب (Gauss) أن : 3 يقسم 2 .

و هذا تناقض واضح . إذن :

$p = 3$.

خلال المراجعة :

إذا كان n عدداً صحيحاً طبيعياً أكبر قطعاً من 1

و يتحقق $3^n - 2^n \equiv 0 [n]$ و كان p أصغر قواسم الأولية الموجبة

فإن : $p \geq 5$ و $3^n - 2^n \equiv 0 [p]$.

و لدينا كذلك : $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\pi} = -1$ إذن : $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$

إذن : $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = -1$

و من هذه النتيجة نكتب : $\left(\frac{b}{a}\right)^2 \times \left(\frac{b}{a}\right) = -1$

يعني : $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)$

نحن الآن مسلحون بمتساويتين ثمينتين :

$$(1) \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1 \quad \text{و} \quad (2) \quad \left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)$$

ننطلق إذن من نتيجتي السؤال (2) أ) و نوظف المتساوية (1) :

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z \\ b_1 = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z \end{array} \right. \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = e^{\frac{-i\pi}{3}}a + e^{\frac{i\pi}{3}}z \\ b_1 = -e^{\frac{-i\pi}{3}}a + e^{\frac{-i\pi}{3}}z \end{array} \right. \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \left(\frac{a}{b}\right)a + \left(\frac{b}{a}\right)z \\ b_1 = -\left(\frac{a}{b}\right)a + \left(\frac{a}{b}\right)z \end{array} \right. \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{a^2}{b} + \frac{bz}{a} \\ b_1 = \frac{-a^2}{b} + \frac{az}{b} \end{array} \right. \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z - a_1 = z - \frac{a^2}{b} - \frac{bz}{a} \\ z - b_1 = z + \frac{a^2}{b} - \frac{az}{b} \end{array} \right. \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z - a_1 = \frac{-a^2}{b} + \left(1 - \frac{b}{a}\right)z \\ z - b_1 = \frac{a^2}{b} + \left(1 - \frac{a}{b}\right)z \end{array} \right. \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z - a_1 = \frac{-a^2}{b} + \left(\frac{a}{b}\right)z \\ z - b_1 = \frac{a^2}{b} + \left(\frac{b}{a}\right)z \end{array} \right.
 \end{aligned}$$



فيما يلي سوف نوظف المتساوية الثمينة (2) :

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \frac{z - b_1}{z - a_1} = \frac{\frac{a^2}{b} + \frac{bz}{a}}{\frac{-a^2}{b} + \frac{az}{b}} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)\left(a + \left(\frac{b}{a}\right)^2 z\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)(z - a)} = \frac{a - \frac{a}{b}z}{z - a} \\
 &= \frac{\left(\frac{-a}{b}\right)(-b + z)}{(z - a)} = \frac{-a(z - b)}{b(z - a)} \\
 &\left(\frac{z - b_1}{z - a_1}\right) = \frac{-a(z - b)}{b(z - a)} \quad \text{و بالتالي :}
 \end{aligned}$$

نعود إذن ، بعد هذه الجولة المرحمة مع r ، إلى السؤال د).

$$a = q(p-1) + r$$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد n نحصل على :

$$an = qn(p-1) + rn$$

$$(13) \Rightarrow rn = an - qn(p-1)$$

$$an = 1 + b(p-1) \quad \text{لدينا حسب النتيجة (12)}$$

نُعرض an بالتعبير $1 + b(p-1)$ في العلاقة (13) نجد :

$$rn = 1 + b(p-1) - qn(p-1)$$

$$\text{أي : } rn = 1 + (b - qn)(p-1)$$

$$rn = 1 + k(p-1) \quad \text{أي : } k = (b - qn)$$

نضع : و لإتمام الجواب يكفي أن نبرهن أن $k \in \mathbb{N}^*$

$$\text{لدينا : } k \in \mathbb{Z} \quad \text{إذن : } (b, q, n) \in \mathbb{Z}^3$$

و نُفصل هنا بين ثلاثة حالات وهي : $k > 0$ أو $0 < k < 0$ أو $k < 0$

$$\text{نفترض أن : } k = 0 \quad \text{إذن : } b = qn$$

نُعرض إذن b بالقيمة qn في النتيجة (12) :

$$rn = 1 \quad \text{و منه حسب النتيجة (13) :}$$

$$\text{أي : } n = 1 \quad \text{يعني :}$$

و هذا تناقض لأن : $1 > n > 0$ إذن : $k \neq 0 \Rightarrow$

$$\text{نفترض أن : } k < 0 \quad \text{إذن : } b < qn$$

نضرب طرفي هذه المقاولتين في العدد السالب قطعا (1) - (p) - نجد :

$$-b(p-1) > -qn(p-1)$$

نُضيف إلى كلا الطرفين الكلمة an نجد :

$$an - b(p-1) > an - qn(p-1)$$

(14) $\Rightarrow 1 > rn$ إذن باستعمال النتيجين (12) و (13) نجد :

و لدينا : $0 < r < 1$ إذن : $r < n$

من (14) و (15) نستنتج أن : $rn > r$ يعني : $1 > r$

العدد الصحيح الطبيعي الوحد الأصغر من 1 هو الصفر .

إذن : $r = 0$ و هذا تناقض لأن $0 \neq r$ حسب الملاحظة 2 .

إذن : $0 < r < n$ يعني : $k \in \mathbb{N}^*$

خلاصة السؤال د : رأينا في هذا السؤال أنه إذا كان r و q على التوالي

باقي و خارج القسمة الأقلية للعدد a على العدد $(p-1)$ فإنه يوجد عدد

صحيح طبيعي غير منعدم k بحيث : $rn = 1 + k(p-1)$

أو بتعبير جميل : $(\exists k \in \mathbb{N}^*) ; rn = 1 + k(p-1)$ (16) \Rightarrow

$$\begin{cases} 2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \\ 3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{k(p-1)} \equiv 1 \pmod{p} \\ 3^{k(p-1)} \equiv 1 \pmod{p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \times 2^{k(p-1)} \equiv -2 \pmod{p} \\ 3 \times 3^{k(p-1)} \equiv 3 \pmod{p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2^{1+k(p-1)} \equiv -2 \pmod{p} \\ 3^{1+k(p-1)} \equiv 3 \pmod{p} \end{cases}$$

• ب 1 •

نعلم أن p عدد أولي و يخالف العدد الأولي 2 إذن : $1 \wedge 2 = p$

و منه حسب $Fermat$: $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

و بنفس الطريقة p عدد أولي يخالف العدد الأولي 3 إذن : $1 \wedge 3 = p$

و منه حسب $Fermat$: $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

• ج 1 •

يكفي أن نبرهن على أن : $1 \wedge (p-1) = n$ ثم نستعمل Bezout في البداية و جب التذكرة بخاصية قوية و مهمة تربط بين مفهوم التفكير إلى

جاء عوامل أولية و مفهوم القاسم المشترك الأكبر . و سوف أذكر بها

باستعمال أمثلة فقط دون الخوض في متأهات الرموز الرياضية.



بالعودة إلى السؤال ج) : ليكن n إلى جداء عوامل أولية بحيث :

$p < p_2 < \dots < p_i$: p تفكك العدد $n-1$ إلى جداء عوامل أولية بحسب (1)

و ليكن $q_j^{r_1} \times q_2^{r_2} \times \dots \times q_j^{r_j}$ إلى جداء عوامل أولية بحيث :

$q_j < q_2 < \dots < q_1 < p$ بما أن p هو أصغر قاسم أولي للعدد n و بما أن $p < p_i$

فإن : $q_1 < q_2 < \dots < q_j < p$ نلاحظ أن الأعداد الأولية p إذن :

$(p^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_i^{\alpha_i}) \wedge (q_1^{r_1} \times q_2^{r_2} \times \dots \times q_j^{r_j}) = 1$

يعني : $n \wedge (p-1) = 1$

و منه حسب Bezout :

$\exists (a, u) \in \mathbb{Z}^2 ; an + u(p-1) = 1$

(12) $\Rightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2 ; an - b(p-1) = -u$

ملاحظة 1 : من هذه النتيجة الأخيرة يمكن أن نستخرج باستعمال

مبرهنة Besout العكسية ما يلي :

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge (p-1) = 1 \\ n \wedge b = 1 \\ n \wedge (p-1) = 1 \end{cases}$$

خلاصة السؤال ج : إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1

و يتحقق $[n] = 2^n - 3^n \equiv 0 \pmod{n}$ و كان p أصغر قاسم أولية الموجبة

فإنه يوجد عددان نسبيان a و b بحيث : $an - b(p-1) = 1$

• د 1 •

ليكن r و q على التوالي باقي و خارج القسمة الأقلية لـ a على (1) .

$$\begin{cases} (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \\ a = q(p-1) + r \\ 0 \leq r < p-1 \end{cases}$$

ملاحظة 2 : قبل أن نجيب على السؤال د) لاحظ أنه بإمكاننا

أن نبين أن $0 < r < p$ و سوف نحتاج هذه النتيجة فيما سيأتي .

لدينا : $0 \leq r < p$ إذن $r = 0$ أو $r > 0$

نفترض أن $r = 0$ إذن : $a = q(p-1)$

يعني : $a \wedge (p-1) = (p-1)$ يقسم a و منه :

$(p-1) \wedge (p-1) = 1$ إذن حسب النتيجة (*) :

يعني : $2 = p$. و هذا تناقض لأن $5 \geq p$

إذن : $0 < r < (p-1)$



$$v'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \quad \text{ولدينا :}$$

- إذا كان : $x = 1$ فإن : $v'(x) = 0$
- إذا كان : $x > 1$ فإن : $v'(x) < 0$
- إذا كان : $x < 1$ فإن : $v'(x) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x + 1) = \ln(0^+) - 0 + 1 = -\infty - 0 + 1 = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right) \\ &= (+\infty)(0 - 1 + 0) = -\infty \end{aligned} \quad \text{ولدينا :}$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة v كما يلي :

x	0	1	$+\infty$
$v'(x)$	+	0	-
v	$-\infty$	-2	$-\infty$

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن الدالة v :

- متصلة على المجال $[0; +\infty]$
- تزايدية على المجال $[0; 1]$
- تناقصية على المجال $[1; +\infty]$
- $v(1) = -2$

إذن 2 - قيمة قصوية للدالة v على المجال $[0; +\infty]$

يعني $\forall x \in [0; +\infty[; v(x) \leq -2 < 0$

يعني $\forall x \in [0; +\infty[; v(x) < 0$

يعني $\forall x \in [0; +\infty[; \ln x - x + 1 < 0$

يعني $\forall x \in [0; +\infty[; \ln x < x - 1$

و بما أن : $[1; +\infty[\subset [0; +\infty[$

فإن : $\forall x \in [1; +\infty[; \ln x < x - 1$

ليكن x عنصرا من المجال $[1; +\infty[$. لدينا :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{x-1}{x \ln x} : \quad \text{لدينا} \\ h'(x) &= \frac{x \ln x - (x-1)(\ln x + 1)}{(x \ln x)^2} : \quad \text{إذن} \\ &= \frac{x \ln x - (x \ln x + x - \ln x - 1)}{(x \ln x)^2} \\ &= \frac{\ln x - x + 1}{(x \ln x)^2} \end{aligned}$$

و نعلم أن : $(\ln x - x + 1) < 0$

و كذلك : $(x \ln x)^2 > 0$

إذن : $\frac{\ln x - x + 1}{(x \ln x)^2} < 0$

يعني : $h'(x) < 0$

أي أن الدالة h تناقصية قطعا على المجال $[1; +\infty[$

و منه باستعمال النتيجة (16) نكتب :

$3^{rn} - 2^{rn} \equiv 1 [p]$ نجمع هاتين المتواقتين طرفا بطرف نجد :

$$3^n - 2^n \equiv 0 [p] \quad \text{ولدينا حسب النتيجة (3) :}$$

$$3^n \equiv 2^n [p] \quad \text{إذن :}$$

$$3^{rn} \equiv 2^{rn} [p] \quad \text{و بما أن } (r \in \mathbb{N}^*) \text{ فإن :}$$

$$(18) \Rightarrow 2^{rn} - 3^{rn} \equiv 0 [p] \quad \text{و منه :}$$

نجمع المتواقتين (17) و (18) طرفا بطرف نجد :

$$3^{rn} - 2^{rn} + 2^{rn} - 3^{rn} \equiv 1 + 0 [p]$$

يعني : $1 \equiv 1 [p]$ يعني كذلك : $1 \equiv 0 [p]$ أي : p يقسم 1

و منه $1 = p$ لأن العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الذي يقسم 1 هو 1 نفسه.

و هذا تناقض لأن $p \geq 5$ إذن n لا وجود له في $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

خلاصة التعريرين بأكمله :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} ; 3^n - 2^n \not\equiv 0 [n]$$

• التعرير الرابع

• الجزء الأول

• 1



$$\begin{cases} h(x) = \frac{x-1}{x \ln x} ; \quad \forall x > 1 \\ h(1) = 1 \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$\varphi(x) = x \ln x$: نضع

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x-1}{x \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\left(\frac{x \ln x}{x-1} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\left(\frac{x \ln x - 1 \ln 1}{x-1} \right)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\left(\frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} \right)} \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} \right)} = \frac{1}{\varphi'(1)} \end{aligned}$$

و لدينا : $\varphi'(x) = \ln x + 1$ إذن : 1

يعني : $\varphi'_d(1) = \varphi'_g(1) = \varphi'(x) = \ln(1) + 1 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \frac{1}{\varphi'_d(1)} = \frac{1}{1} = 1 = h(1)$$

إذن : $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = h(1)$

و هذا يعني أن الدالة h دالة متصلة على يمين 1

• ب 1

نعتبر الدالة العددية v المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بما يلي :

$$v(x) = \ln x - x + 1$$

لندرس تغيرات الدالة v على المجال $[0; +\infty[$

لدينا v عبارة عن تشكيلة منسجمة من الدوال المتصلة والقابلة للإشتقاق

على المجال $[0; +\infty[$. إذن : v قابلة للإشتقاق على $[0; +\infty[$

•  ب 1 

ليكن x عنصرا من المجال $[1; +\infty]$.

$$\begin{aligned} g(x) - \ln 2 &= \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt \\ &= \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{t} \ln t} - \frac{1}{t \ln t} \right) dt \\ &= \int_x^{x^2} \left(\frac{\sqrt{t}}{t \ln t} - \frac{1}{t \ln t} \right) dt \\ &= \int_x^{x^2} \left(\frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} \right) dt \end{aligned}$$



•  أ 2 

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x \ln x} \right) - \left(\frac{1}{x \ln x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln x} \right) - \left(\frac{1}{x \ln x} \right) = \left(\frac{1}{+\infty} \right) - \left(\frac{1}{+\infty} \right) = 0 \end{aligned}$$

لخلص النتائج المتعلقة بالدالة h في الجدول التالي :

x	1	$+\infty$
$h'(x)$		-
h	1	0

•  ب 2 

نلاحظ حسب جدول تغيرات الدالة h أن الدالة h متصلة و تناصصية قطعا على المجال $[1; +\infty]$ بحيث :

$$h([1; +\infty[) = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) ; h(1) \right] = [0; 1]$$

إذن : h تقابل من المجال $[1; +\infty]$ نحو المجال $[0; 1]$.
أي : $\forall x \in [1; +\infty[; \exists! y \in [0; 1] : y = h(x)$.
أو بتعبير آخر : $\forall x \in [1; +\infty[; \exists! h(x) \in [0; 1] : h(x) = y$.
يعني : $(\forall x \geq 1) ; 0 < h(x) \leq 1$.

الجزء الثاني

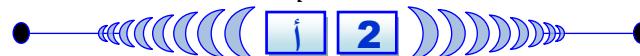
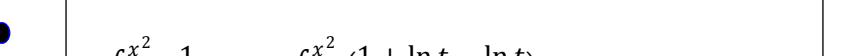
•  أ 1 

ليكن x عنصرا من المجال $[1; +\infty]$.
لاحظ في البداية أن : $(t \ln t)' = 1 + \ln t$.
نستغل إذن هذه الملاحظة أثناء الحساب .

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt &= \int_x^{x^2} \left(\frac{1 + \ln t - \ln t}{t \ln t} \right) dt \\ &= \int_x^{x^2} \left(\frac{1 + \ln t}{t \ln t} \right) dt - \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{t} \right) dt \\ &= \int_x^{x^2} \frac{(t \ln t)'}{t \ln t} dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t} dt \\ &= [\ln(t \ln t)]_x^{x^2} - [\ln t]_x^{x^2} \\ &= (\ln(x^2 \ln(x^2)) - \ln(x \ln x)) - (\ln(x^2) - \ln x) \\ &= \ln\left(\frac{x^2 \ln(x^2)}{x \ln x}\right) - \ln\left(\frac{x^2}{x}\right) = \ln\left(\frac{2x^2 \ln(x)}{x \ln x}\right) - \ln(x) \\ &= \ln(2x) - \ln(x) = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln 2 \end{aligned}$$

و بالتالي : $(\forall x > 1) ; \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2$

Remarque : u et t sont des paramètres d'intégration qu'on peut schématiser comme des espaces mémoires temporels

•  أ 2 

ليكن $1 < x$ و ليكن $t \in [\sqrt{x}; x]$.

لدينا الدالة f تناصصية على المجال $[1; +\infty]$.

إذن فهي تناصصية على المجال $[\sqrt{x}; x]$ لأن $1 < x > \sqrt{x}$.

بما أن : $h(x) \leq h(t) \leq h(\sqrt{x})$ فلن $\sqrt{x} \leq t \leq x$.

$h(x) \leq \left(\frac{t-1}{t \ln t} \right) \leq h(\sqrt{x})$ يعني :

$\int_{\sqrt{x}}^x h(x) dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{t-1}{t \ln t} \right) dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x h(\sqrt{x}) dt$ إذن :

$h(x) \int_{\sqrt{x}}^x 1 dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{t-1}{t \ln t} \right) dt \leq h(\sqrt{x}) \int_{\sqrt{x}}^x 1 dt$ يعني :

$h(x) [t]_{\sqrt{x}}^x \leq \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{t-1}{t \ln t} \right) dt \leq h(\sqrt{x}) [t]_{\sqrt{x}}^x$ يعني :

$h(x)(x - \sqrt{x}) \leq \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{t-1}{t \ln t} \right) dt \leq h(\sqrt{x})(x - \sqrt{x})$ يعني :

و بالتالي حسب نتيجة السؤال (ج) $(\forall x > 1)$ نكتب :

$$(*) \quad h(x)(x - \sqrt{x}) \leq g(x) - \ln 2 \leq h(\sqrt{x})(x - \sqrt{x})$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$(\forall x > 1) ; g(x) \geq \underbrace{h(x)(x - \sqrt{x}) + \ln 2}_{x \rightarrow +\infty}$$

$+ \infty$

إذن حسب خاصية الترتيب وال نهايات نستنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

بالنسبة لنهاية $\frac{g(x)}{x}$ بجوار $+\infty$ ننطلق من التأثير الثمين المحصل عليه في السؤال (أ) كما سوف نستعمل أثناء الحساب النهاية المحصل عليها سابقا و هي : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$. لدينا :

$$(x - \sqrt{x})h(x) + \ln 2 \leq g(x) \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x}) + \ln 2$$

نضرب طرفي هذا التأثير في العدد الموجب قطعا $\frac{1}{x}$ نجد :

$$\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(x) + \frac{\ln x}{x} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{x}$$

ثم نحسب نهاية طرفي هذا التأثير بجوار $+\infty$ نحصل على :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(x) + \frac{\ln 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)h(x) + \frac{\ln 2}{x} \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{+\infty}}\right)(0) + \frac{\ln 2}{+\infty} = (1 - 0)(0) + 0 = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t = \sqrt{x}}} \left(1 - \frac{1}{t}\right)h(t) + \frac{\ln 2}{t^2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{+\infty}\right)(0) + \frac{\ln 2}{(+\infty)^2} = 0 \end{aligned}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\underbrace{\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(x) + \frac{\ln x}{x}}_{x \rightarrow +\infty} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \underbrace{\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{x}}_{x \rightarrow +\infty}$$

0

إذن حسب خاصية النهايات والترتيب نستنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

● ب 2

نضرب أطراف التأثير (*) في العدد الموجب قطعا $\left(\frac{1}{x - 1}\right)$ نجد :

$$\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}\right)h(x) \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x - 1} \leq \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}\right)h(\sqrt{x})$$

بعد ذلك نحسب نهاية طرفي هذا التأثير على يمين 1 نجد :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}\right)h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}h(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\right)h(x) = \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1} + 1}\right)h(1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}\right)h(\sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\right)h(\sqrt{x}) \\ &= \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1} + 1}\right)h(\sqrt{1}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\underbrace{\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}\right)h(x)}_{x \rightarrow 1^+} \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x - 1} \leq \underbrace{\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}\right)h(\sqrt{x})}_{x \rightarrow 1^+}$$

$\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{g(x) - g(1)}{x - 1}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{وبالتالي :}$$

أي أن الدالة g' قابلة للإشتقاق على اليمين في 1 و $g'_d(1) = \frac{1}{2}$

● ج 2

لدينا حسب التأثير الوارد في السؤال (أ) :

$$(\forall x > 1) ; g(x) \geq h(x)(x - \sqrt{x}) + \ln 2$$

لحسب نهاية 2 بجوار $+\infty$ $(x - \sqrt{x})h(x) + \ln 2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})h(x) + \ln 2 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x})(x - 1)}{x \ln x} + \ln 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x - 1)}{x \ln x} + \ln 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln x}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\frac{x - 1}{x}\right) + \ln 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln x}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \ln 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{0^+}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{+\infty}}\right) \left(1 - \frac{1}{+\infty}\right) + \ln 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (+\infty)(1 - 0)(1 - 0) + \ln 2 \\ &= (+\infty)(1)(1) + \ln 2 = +\infty \end{aligned}$$



● **ب 3** ●

لدينا حسب نتيجة السؤال 2) ب) من الجزء الأول :
 $(\forall x \geq 1) ; 0 < h(x) \leq 1$

$$\begin{aligned} x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1 & \text{ إذن : } \\ (\forall x \geq 1) ; 0 < h(\sqrt{x}) \leq 1 & \\ (\forall x \geq 1) ; 0 < \frac{1}{2}h(\sqrt{x}) \leq \frac{1}{2} & \text{ و منه :} \\ (\forall x \geq 1) ; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2} & \text{ يعني :} \end{aligned}$$

و من هذه الكتابة نستنتج أن g دالة تزايدية قطعا على المجال $[1; +\infty]$.
 و لإنشاء جدول تغيرات g نستدعي النتائج التي حصلنا عليها من قبل و هي :

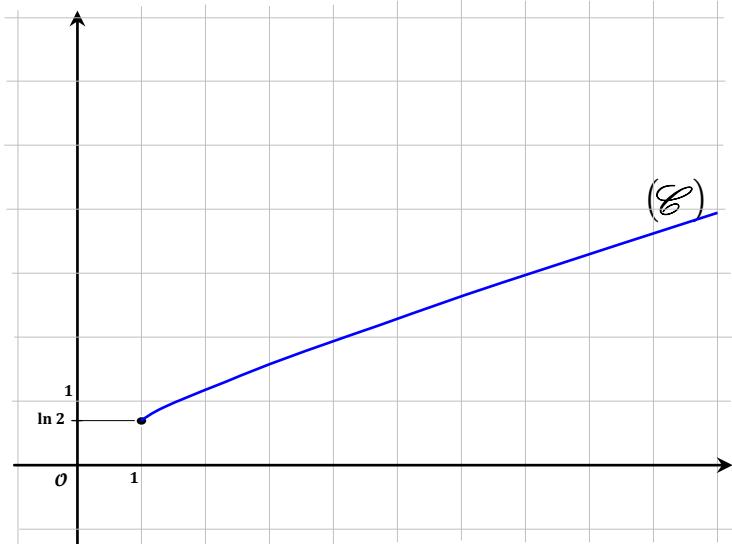
g معرفة و متصلة على $[1; +\infty]$	■
g تزايدية قطعا على $[1; +\infty]$	■
$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$	■
$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1) = \ln 2$	■

نرسم إذن جدول تغيرات g كما يلي :

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
g	$\ln 2$	$+\infty$



● **ج 3** ●



● **الجزء الثالث** ●

ل يكن x عنصرا من المجال $[1; +\infty)$.
 $k(x) = g(x) - x + 1$ لدينا :

بما أن g قابلة للإشتقاق على المجال $[1; +\infty)$.
 فإن : $k' = g'(x) - 1$ لدينا :

لدينا حسب نتيجة السؤال 3) ب) من الجزء الثاني :
 $(\forall x \geq 1) ; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$

أذكر في البداية بما يلي : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و كان a عنصرا من المجال I . فإن f تقبل عدة دوال أصلية على المجال I و بالخصوص تقبل دالة أصلية F التي تتعذر في a و تتحقق :

$$\begin{cases} F(a) = 0 \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F : I &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

انتهى التذكرة .

ليكن a عنصرا من المجال $[1; +\infty)$.

نعتبر الدالة العددية u المعرفة على المجال $[1; +\infty)$ بما يلي :

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \ln x}$$

نلاحظ أن u دالة متصلة على $[1; +\infty)$.
 وذلك حسب المبرهنات العامة للاتصال .

إذن : u تقبل عدة دوال أصلية على $[1; +\infty)$.
 و بالخصوص u تقبل دالة أصلية v التي تتعذر في a و معرفة بما يلي :

$$\begin{cases} v(a) = 0 \\ v'(x) = u(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} v : [1; +\infty) &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x u(t) dt \end{aligned}$$

و بالتالي بالرجوع إلى تعريف الدالة g نكتب :

$$g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt ; x > 1$$

$$= \int_x^a \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt + \int_a^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt$$

$$= \int_a^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt - \int_a^x \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt$$

$$= v(x^2) - v(x)$$



نحصل إذن على العلاقة التالية : $g(x) = v(x^2) - v(x) ; x > 1$.
 انطلاقا من الدوال $x \rightarrow x$ و v و $x^2 \rightarrow x^2$ نستطيع القول ، باستعمال المبرهنات العامة لاشتقاق مركب دالتين ، أن g قابلة للإشتقاق على المجال $[1; +\infty)$.

و لدينا : $(\forall x > 1) ; g'(x) = (v(x^2) - v(x))'$

$$= 2x v'(x^2) - v'(x)$$

$$= 2x u(x^2) - u(x)$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2} \ln(x^2)} - \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} = \frac{2x}{2x \ln x} - \frac{1}{\sqrt{x} \ln x}$$

$$= \frac{x}{x \ln x} - \frac{\sqrt{x}}{x \ln x} = \frac{x - \sqrt{x}}{x \ln x} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x})^2 \ln(\sqrt{x}^2)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} \ln \sqrt{x}} \right) = \frac{1}{2} h(\sqrt{x})$$

$$(\forall x > 1) ; g'(x) = \frac{1}{2} h(\sqrt{x})$$



لدينا $(u_n)_{n \geq 0}$ متالية تزايدية قطعا.

و بما أنها مكبورة بالعدد α (لأن $u_n < \alpha$) حسب (1) فإنها متقاربة و نهايتها ℓ تتحقق: $1 + g(\ell) = \ell$

و رأينا أن هذه المعادلة تقبل حل وحيدا في المجال $[1; +\infty)$ و هو α .

$$\text{إذن: } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \alpha$$



نعتبر الدالة العددية ψ المعرفة على المجال $[1; +\infty)$ بما يلى: $\psi(x) = 1 + g(x)$ بما أن g قابلة للإشتقاق على المجال $[1; +\infty)$.

فإن ψ قابلة للإشتقاق على المجال $[1; +\infty)$.

و منه ψ قابلة للإشتقاق على أي مجال يوجد ضمن $[1; +\infty)$.

نختار المجال $[u_n; \alpha]$ الذي يوجد ضمن $[1; +\infty)$.

(وذلك لأن: $1 \leq u_n < \alpha$) ($\forall n \geq 0$)

إذن بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية (TAF)

على الدالة ψ في المجال $[u_n; \alpha]$ نجد:

$$\exists c \in [u_n; \alpha] ; \frac{\psi(u_n) - \psi(\alpha)}{u_n - \alpha} = \psi'(c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(u_n) = 1 + g(u_n) = u_{n+1} \\ \psi(\alpha) = 1 + g(\alpha) = \alpha \end{array} \right. \text{لدينا:}$$

$$\exists c \in [u_n; \alpha] ; \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} = \psi'(c) \text{ إذن:}$$

$$(*) \exists c \in [u_n; \alpha] ; \left| \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} \right| = |\psi'(c)| \text{ يعني:}$$

لدينا: $c \in [u_n; \alpha]$ و $\psi'(c) = g'(c)$

إذن: $c \geq 1 \quad 1 \leq u_n < c < \alpha$ أي:

و منه حسب نتيجة السؤال (3) ب) من الجزء الثاني: $0 < g'(c) \leq \frac{1}{2}$

$$\text{إذن: } |\psi'(c)| = |g'(c)| \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{أي: } | \psi'(c) | \leq \frac{1}{2} \quad (**)$$

إذن باستعمال الكتابتين (*) و (**) نكتب:

$$(\forall n \geq 0) ; \left| \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} \right| \leq \frac{1}{2}$$

$$(\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \text{ يعني:}$$



إذن: $(\forall x \geq 1) ; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2} < 1$
 يعني: $(\forall x \geq 1) ; g'(x) < 1$
 و منه: $(\forall x \geq 1) ; g'(x) - 1 < 0$
 أي: $(\forall x \geq 1) ; k'(x) < 0$

و هذا يعني أن الدالة k تنقصصية قطعا على المجال $[1; +\infty)$.

إذن k تقابل من المجال $[1; +\infty)$ نحو صورته بالدالة k .

$$k([1; +\infty)) = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) ; k(1) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(x)}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right) \\ = \left(0 - 1 + \frac{1}{+\infty} \right) (+\infty) = (-1)(+\infty) = -\infty$$

و بالتالى: k تقابل من المجال $[1; +\infty)$ نحو المجال $]-\infty; \ln 2]$.



لدينا: $0 \in]-\infty; \ln 2]$ إذن: $0 \in]-\infty; \ln 2]$

و بما أن k تقابل من $[1; +\infty)$ نحو الصفر يمتلك ساقا واحدا بالدالة k في المجال $[1; +\infty)$.

فإن الصفر يمتلك ساقا واحدا بالدالة k في المجال $[1; +\infty)$.

إذن $\exists! \alpha \in [1; +\infty[; k(\alpha) = 0$ يعني: $\exists! \alpha \in [1; +\infty[; g(\alpha) - \alpha + 1 = 0$

يعني: $\exists! \alpha \in [1; +\infty[; 1 + g(\alpha) = \alpha$ أو بتعبير لطيف: $x = 1 + g(x)$ تقبل حل وحيدا

في المجال $[1; +\infty)$ و هو α .



باستعمال البرهان بالترجع ، نعتبر العبارة (P_n) التالية: $(P_n) : (\forall n \geq 0) ; 1 \leq u_n < \alpha$

من أجل $n = 0$ لدينا حسب المعطيات: $1 \leq u_0 < \alpha$

إذن: العبارة (P_0) صحيحة.

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و نفترض أن: $1 < u_n < \alpha$

ندخل على هذا التأثير الدالة التزايدية قطعا g نحصل على:

$$g(1) \leq g(u_n) < g(\alpha)$$

ثم نضيف 1 لكل طرف: $g(1) + 1 \leq g(u_n) + 1 \leq g(\alpha) + 1$

إذن: باستعمال النتائج السابقة نكتب: $1 < \ln 2 + 1 \leq u_{n+1} < \alpha$

يعني: $1 < u_{n+1} \leq \alpha$ إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة.

حصلنا إذن على الوضعية التالية: $\{(P_0) \text{ est vraie} \}$

$\{(P_n) \text{ implique } (P_{n+1}) ; \forall n \geq 0 \}$

و بالتالى حسب مبدأ الترجع: $(P_n) \text{ est toujours vraie}$

أي: $(\forall n \geq 0) ; 1 \leq u_n < \alpha$



لدينا حسب آخر نتيجة: $(\forall n \geq 0) ; u_n < \alpha$

ندخل الدالة التناقصية قطعا k على هذه المقاوطة نجد:

$$(\forall n \geq 0) ; k(u_n) > k(\alpha)$$

و بما أن: $k(u_n) > 0$ فإن: $k(\alpha) = 0$

يعني: $(\forall n \geq 0) ; g(u_n) - u_n + 1 > 0$

يعني: $(\forall n \geq 0) ; 1 + g(u_n) > u_n$

و منه: $(\forall n \geq 0) ; u_{n+1} > u_n$

و من هذه الكتابة نستنتج أن المتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعا.



ب 2 II

$$\begin{aligned}
 \text{لدينا: } & (\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \\
 |u_n - \alpha| & \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha| \\
 & \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2} |u_{n-2} - \alpha| \\
 & \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} |u_{n-3} - \alpha| \\
 & \vdots \quad \vdots \\
 & \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_{n-n} - \alpha|
 \end{aligned}$$

$$(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

و يمكن كذلك استعمال البرهان بالترجع.

$$(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha| \quad \text{لدينا: } n = 0$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل 0.

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \quad \text{ل يكن } n \in \mathbb{N} \text{ و نفترض أن:}$$

نضرب طرفي هذه المقاوطة في العدد الموجب $\frac{1}{2}$ نجد:

$$(\forall n \geq 0) ; \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

$$(\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \quad \text{بما أن:}$$

$$(\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

و هذا يعني أن العبارة صحيحة من أجل (1 +).

و وبالتالي حسب مبدأ الترجع:

$$(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها عدد موجب قطعاً و أصغر من 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0 \quad \text{و منه: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

نحصل إذن على الوضعية التالية:

$$(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|}_{n \rightarrow \infty}$$

0

أو بتعبير واضح نحصل على الوضعية التالية:

$$(\forall n \geq 0) ; \underbrace{-\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|}_{n \rightarrow \infty} \leq (u_n - \alpha) \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|}_{n \rightarrow \infty}$$

0

0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - \alpha) = 0 \quad \text{و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha \quad \text{أي:}$$