هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الامتحانات

الامتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2013

مادة الرياضيات
العلوم الرياضية أ و ب
مدة الإنجاز : أربع ساعات
المعامل : 9

التمرين الأول : (3,5 ن)

نذكر أن $(\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة واحدية تبادلية و كاملة .

1 نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي : $x * y = x + y - 2 \quad ; \quad \forall (x,y) \epsilon \mathbb{Z}^2$

1 أ 0,50 ن بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي .

1 ب 0,25 ن بين أن : $(\mathbb{Z}, *)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده .

1 ج 0,50 ن بين أن : $(\mathbb{Z}, *)$ زمرة تبادلية .

2 نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف بـ : $x \top y = xy - 2x - 2y + 6 \; ; \; \forall (x,y) \epsilon \mathbb{Z}^2$

و نعتبر التطبيق f من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$ المعرف بما يلي : $f(x) = x + 2 \quad ; \quad (\forall x \epsilon \mathbb{Z})$

2 أ 0,50 ن بين أن التطبيق f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z}, \times)$ نحو $(\mathbb{Z}, \top)$.

2 ب 0,25 ن بين أن : $(x * y) \top z = (x \top z) * (y \top z) \quad ; \quad \forall (x,y,z) \epsilon \mathbb{Z}^3$

3 0,75 ن إستنتج من كل ما سبق أن : $(\mathbb{Z}, *, \top)$ حلقة تبادلية و واحدية .

4 أ 0,25 ن بين أن : $x \top y = 2$ إذا وفقط إذا كان $x = 2$ أو $y = 2$.

4 ب 0,25 ن استنتج أن الحلقة $(\mathbb{Z}, *, \top)$ كاملة .

4 ج 0,25 ن هل $(\mathbb{Z}, *, \top)$ جسم ؟ (علل الجواب)

التمرين الثاني : (3,5 ن)

I ليكن a عددا عقديا غير منعدم .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E) : 2z^2 - (3 + i\sqrt{3})az + (1 + i\sqrt{3})a^2 = 0$$

I 1 0,25 ن تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $(-1 + i\sqrt{3})^2 a^2$.

I 2 0,50 ن حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

II المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط A و B و M التي ألحاقها على التوالي : a و $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$ و z .

ليكن r الدوران الذي مركزه M و زاويته $\frac{\pi}{3}$. نضع : $A_1 = r^{-1}(A)$ و $B_1 = r(B)$

(حيث r^{-1} هو الدوران العكسي للدوران r)

ليكن a_1 و b_1 لحقي A_1 و B_1 على التوالي .

II 1 0,50 ن تحقق أن المثلث OAB متساوي الأضلاع .

II 2 أ 0,50 ن بين أن : $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ و $b_1 = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

II 2 ب 0,50 ن بين أن الرباعي OA_1MB_1 متوازي أضلاع .

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

II | 3 | أ | نفترض أن $M \neq A$ و $M \neq B$ بين أن : $\frac{z-b_1}{z-a_1} = -\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \times \frac{a}{b}$ | 0,50 ن

II | 3 | ب | بين أن النقط M و A_1 و B_1 مستقيمية إذا و فقط إذا كانت النقط M و O و A و B متداورة . | 0,75 ن

التمرين الثالث : (3 ن)

الهدف من التمرين هو البحث عن الأعداد الصحيحة الطبيعية n الأكبر قطعا من 1
و التي تحقق الخاصية $(\Re)$ التالية : $(\Re)$: $3^n - 2^n \equiv 0\ [n]$.
1 | نفترض أن n يحقق الخاصية $(\Re)$. و ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n .

1 | أ | بين أن : $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$ ثم استنتج أن $p \geq 5$. | 0,75 ن

1 | ب | بين أن : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و $3^{p-1} \equiv 1[p]$. | 0,50 ن

1 | ج | بين أنه يوجد زوج (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $an - b(p-1) = 1$. | 0,50 ن

1 | د | ليكن r و q باقي و خارج القسمة الأقليدية للعدد a على $(p-1)$.
(يعني : $a = q(p-1) + r$ حيث : $0 \leq r < p-1$ و $q \epsilon \mathbb{Z}$)
بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم k بحيث : $rn = 1 + k(p-1)$. | 0,50 ن

2 | إستنتج من كل ما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 و يحقق الخاصية $(\Re)$. | 0,75 ن

التمرين الرابع : (10 ن)

الجزء الأول نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{x-1}{x \ln x} \ ; \ (\forall x > 1) \\ h(1) = 1 \end{cases}$$

1 | أ | بين أن الدالة h متصلة على اليمين في 1 . | 0,25 ن

1 | ب | بين أن : $\ln x < x - 1$; $(\forall x > 1)$ ثم استنتج أن h تناقصية قطعا على المجال $]0;+\infty[$. | 0,75 ن

2 | أ | أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة h . | 0,50 ن

2 | ب | استنتج أن : $0 < h(x) \leq 1$; $(\forall x \geq 1)$. | 0,25 ن

الجزء الثاني نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي :

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة g
في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$$\begin{cases} g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt \ ; \ (\forall x > 1) \\ g(1) = \ln 2 \end{cases}$$

1 | أ | تحقق أن : $(\forall x > 1)$; $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2$ | 0,25 ن

1 | ب | تحقق أن : $(\forall x > 1)$; $g(x) - \ln 2 = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t \ln t} dt$ | 0,25 ن

1 | ج | بين أن : $(\forall x > 1)$; $g(x) - \ln 2 = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x} \left(\frac{t-1}{t \ln t}\right) dt$ | 0,50 ن

2 | أ | بين أن : $(\forall x > 1)$; $(x - \sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})$ | 0,50 ن

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

0,50 ن | | 2 | ب | استنتج أن الدالة g قابلة للإشتقاق على اليمين في 1 .

0,75 ن | | 2 | ج | بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 0$

0,75 ن | | 3 | أ | بين أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$. و أن : $(\forall x > 1)\ ;\ g'(x) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x})$

0,50 ن | | 3 | ب | استنتج أن : $(\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .

0,50 ن | | 3 | ج | أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$.

الجزء الثالث

0,50 ن | I | 1 | | بين أن الدالة : $k : x \longmapsto g(x) - x + 1$ تقابل من $[1;+\infty[$ نحو $]-\infty;\ln 2]$.

0,25 ن | I | 2 | | استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1;+\infty[$ بحيث : $1 + g(\alpha) = \alpha$.

II | | | نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1 + g(u_n)\ ;\ (\forall n \geq 0) \\ 1 \leq u_0 < \alpha \end{cases}$$

0,50 ن | II | 1 | أ | بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ 1 \leq u_n < \alpha$

0,50 ن | II | 1 | ب | بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا .

0,75 ن | II | 1 | ج | استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة . و أن : $\lim\limits_{n\infty} u_n = \alpha$

0,50 ن | II | 2 | أ | بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

0,50 ن | II | 2 | ب | بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

0,25 ن | II | 2 | ج | استنتج مرة ثانية أن : $\lim\limits_{n\infty} u_n = \alpha$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma