

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 9
مدة الانجاز : أربع ساعات



الامتحانات الوطنية الموحد
نيل شهادة البكالوريا
الدورة الاستدراكية 2012

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,5 ن)

الجزءان (I) و (II) مستقلان .

(I) لكل a و b من المجال $I = [1; +\infty[$ نضع : $a \perp b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2$



① بين أن : $\perp$ قانون تركيب داخلي في I .

0,50 ن

② بين أن القانون $\perp$ تبادلي و تجميعي في I .

0,50 ن

③ بين أن : $\perp$ يقبل عنصرا محايدا في I و جب تحديده .

0,25 ن

(II) نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة . لتكن : $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}^* \right\}$

① بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

0,50 ن

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^* &\rightarrow E \\ x &\rightarrow M(x) \end{aligned}$$

② نعتبر التطبيق φ المعروف بما يلي :

أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*, \times)$ نحو $(E, \times)$.

0,50 ن

ب) استنتج بنية $(E, \times)$.

0,50 ن

ج) بين أن المجموعة : $H = \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / n \in \mathbb{Z} \right\}$ زمرة جزئية من $(E, \times)$.

0,75 ن

التمرين الثاني : (3,5 ن)

الجزءان (I) و (II) مستقلان .

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E) : z^2 - 4\left(1 + \frac{2}{3}i\right)z + \frac{5}{3} + 4i = 0$

① أ) تحقق أن العدد $z_1 = 1 + \frac{2}{3}i$ حل للمعادلة (E) .

0,50 ن

ب) بين أن الحل الثاني للمعادلة هو $z_2 = 3z_1$

0,50 ن

(II) نعتبر ثلاث نقط A و B و Ω مختلفة مثنى مثنى ألحاقها على التوالي : a و b و ω .

ليكن r الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

نضع : $P = r(A)$ و $B = r(Q)$

ليكن العدد العقدي p لحق النقطة P و العدد العقدي q لحق النقطة Q .

① أ) بين أن : $p = \omega + e^{\frac{i\pi}{3}}(a - \omega)$ و $q = \omega + e^{-\frac{i\pi}{3}}(b - \omega)$

0,50 ن

ب) بين أن : $\frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$

0,25 ن





ج) بين أن : $\frac{p-a}{q-b} = \left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right) e^{\frac{4i\pi}{3}}$

0,50 ن

د) نفترض أن : $\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

ا) بين أن : $APQB$ متوازي أضلاع .

0,75 ن

ب) بين أن : $\arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ و استنتج أن الرباعي $APQB$ مستطيل .

0,75 ن

التمرين الثالث : (3,0 ن)

1) ا) تحقق أن : 503 عدد أولي.

0,25 ن

ب) بين أن $7^{502} \equiv 1[503]$ ثم استنتج أن $7^{2008} \equiv 1[503]$.

0,75 ن

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) : 49x - 6y = 1$

0,50 ن

علما أن الزوج $(1; 8)$ حل خاص للمعادلة (E) ، حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) مبرزا مراحل الحل.



3) نضع : $N = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2007}$

0,25 ن

ا) بين أن الزوج $(7^{2006}, N)$ حل للمعادلة (E) .

0,25 ن

ج) استنتج أن N يقبل القسمة على 2012

1,00 ن

د) بين أن $N \equiv 0[4]$ و $N \equiv 0[503]$

التمرين الرابع : (7,5 ن)

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ بما يلي : $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$

1) أدرس تغيرات الدالة g على المجال $[0; +\infty[$

0,50 ن

2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty[$.

0,50 ن

(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$

1) بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

1,00 ن

2) بين أنه لكل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = e^x g(e^{-x})$

0,50 ن

3) ضع جدول تغيرات الدالة f

0,50 ن

4) أنشئ $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f و $(\mathcal{C}')$ الممثل للدالة $(-f)$ في نفس المعلم $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1,00 ن

نقبل أن $-0,7$ قيمة مقربة لأفصول نقطة الإنعطاف الوحيدة للمنحنى $(\mathcal{C})$.

5) بين أن لكل x من $] -1; 0[$ لدينا : $0 < f'(x) < g(e)$

0,75 ن

6) بين أن المعادلة $f(x) + x = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$. وأن : $-1 < \alpha < 0$

0,75 ن

$$\begin{cases} u_{n+1} = -f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

⑦ نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

① بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : -1 \leq u_n \leq 0$ 0,50 ن

② بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$ 0,50 ن

③ استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$ 0,50 ن

④ علما أن : $g(e) < 0,6$ أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ 0,50 ن

التمرين الخامس : (2,5 ن)

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \left(\frac{\ln t}{1+t^2} \right) dt$$

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي :

① أحسب $F(1)$. 0,25 ن



② ① بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و احسب $F'(x)$. 0,50 ن

③ استنتج أن لكل x من المجال $]0; +\infty[$ لدينا : $F(x) = 0$ 0,50 ن

④ باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن لكل x من $]0; +\infty[$ لدينا : 0,50 ن

$$F(x) = \left(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$$

⑤ بين أن : $(\forall x > 0) : \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)$ 0,25 ن

⑥ استنتج أن : $(\forall x > 0) : \ln x = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$ 0,50 ن

