

التمرين الأول : (3,5 ن)

■ (I) ①

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



■ (I) ②

لدينا حسب السؤال ① : $A^2 = I - A$

$$A(A + I) = A^2 + A = I \quad \text{إذن :}$$

$$(A + I)A = A^2 + A = I \quad \text{و كذلك :}$$

و منه A مصفوفة قابلة للقلب ومقلوبها هو المصفوفة $(A + I)$

$$A^{-1} = A + I \quad \text{أي بتعبير آخر :}$$

■ (II) ①

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}$.

لدينا :

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1 = (xy)^2 - x^2 - y^2 + 1 + 1 = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2$$

■ (II) ②

ليكن a و b عنصرين من $I =]1; +\infty[$

$$\text{إذن : } a > 1 \text{ و } b > 1$$

$$\text{و منه : } a^2 > 1 \text{ و } b^2 > 1$$

$$\text{يعني : } (a^2 - 1) > 0 \text{ و } (b^2 - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - 1)(a^2 - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - 1)(a^2 - 1) + 1 > 1$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 - a^2 - b^2 + 2 > 1$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sqrt{a^2b^2 - a^2 - b^2 + 2} &> 1 \\ \Leftrightarrow a * b &> 1 \\ \Leftrightarrow a * b &\in I \end{aligned}$$

و منه * قانون تركيب داخلي في I .

■ (II) ③ i

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} \varphi(a) * \varphi(b) &= \sqrt{a+1} * \sqrt{b+1} \quad \text{لدينا :} \\ &= \sqrt{(a+1)(b+1) - (a+1) - (b+1) + 2} \\ &= \sqrt{ab+1} = \varphi(a \times b) \end{aligned}$$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ نحو $(I, *)$

ليكن y عنصرا من I .

$$\begin{aligned} \varphi(x) = y &\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = y \quad \text{لدينا :} \\ &\Leftrightarrow x = y^2 - 1 \end{aligned}$$

بما أن : $y > 1$ فإن : $y^2 - 1 > 0$ و منه $x \in \mathbb{R}_+^*$

و بما أن : $y^2 - 1$ عدد وحيد

فإن : $\varphi(x) = y \quad : \quad (\exists! x = y^2 - 1), (\forall y \in I)$

و منه φ تقابل من $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ نحو $(I, *)$

و تقابله العكسي معرف بما يلي :

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : (I, *) &\rightarrow (\mathbb{R}_+^*, \times) \\ y &\rightarrow y^2 - 1 \end{aligned}$$

و بالتالي φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ نحو $(I, *)$.

■ (II) ③ ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة.

ولدينا : $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\times$ هو

العدد 1 و كل عنصر x يقبل ماثلا و هو مقلوبه $\frac{1}{x}$.

إن : $(I, *)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون * هو العدد $\varphi(1)$

و كل عنصر y يقبل ماثلا و هو $Sym(y)$.

$$\text{و لدينا : } \varphi(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

و لدينا كذلك : $y \in I$

$$\text{إذن يوجد } x \text{ من } \mathbb{R}^* \text{ بحيث : } y = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}(y) = y^2 - 1$$



■ (I) 2 (i)

$$z_1 z_2 = ai(a)(1 + i)$$

$$\Leftrightarrow z_1 z_2 = a^2 i - a^2$$

$$\Leftrightarrow z_1 z_2 = a^2 (i - 1)$$



■ (I) 2 (b)

في البداية يجب كتابة $z_1 z_2$ في شكله المثلثي.

$$z_1 z_2 = a^2 (i - 1) \text{ لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow z_1 z_2 = a^2 \sqrt{2} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow z_1 z_2 = a^2 \sqrt{2} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$\Leftrightarrow z_1 z_2 = a^2 \sqrt{2} \left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$\Leftrightarrow z_1 z_2 = a^2 \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$$

$$\Leftrightarrow z_1 z_2 = a^2 \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$z_1 z_2 \in \mathbb{R} \text{ ولدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \arg(z_1 z_2) \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(a^2 \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(a^2 \sqrt{2}) + \arg\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(a^2) + \frac{3\pi}{4} \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow 2 \arg(a) + \frac{3\pi}{4} \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow 2 \arg(a) \equiv \frac{-3\pi}{4} [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(a) \equiv \frac{-3\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2} \right]$$



$$\text{و منه : } \text{Sym}(y) = \text{Sym}(\varphi(x))$$

$$= \varphi(\text{Sym}(x))$$

$$= \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \varphi\left(\frac{1}{y^2 - 1}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{y^2 - 1} + 1} = \sqrt{\frac{y^2}{y^2 - 1}}$$

■ (II) 3 (c)

لدينا (Γ) جزء غير فارغ من I

لأنه إذا كان $m \in \mathbb{Z}$ فإن $2^m > 0$

يعني : $2^m + 1 > 1$

يعني : $\sqrt{2^m + 1} > 1$

يعني : $\sqrt{2^m + 1} \in I$

ليكن $\sqrt{1 + 2^m}$ و $\sqrt{1 + 2^n}$ عنصرين من (Γ)

لدينا :

$$\begin{aligned} (\sqrt{1 + 2^m}) * (\sqrt{1 + 2^n})' &= (\sqrt{1 + 2^m}) * \left(\sqrt{\frac{1 + 2^n}{2^n}} \right) \\ &= \sqrt{(1 + 2^m) \left(\frac{1 + 2^n}{2^n} \right) - (1 + 2^m) - \left(\frac{1 + 2^n}{2^n} \right) + 2} \\ &= \sqrt{2^{m-n} + 1} \in (\Gamma) \end{aligned}$$

وبالتالي $(\Gamma, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(I, *)$.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

■ (I) 1

$$(E) : iz^2 + (2 - i)az - (1 + i)a^2 = 0$$

$$\Delta = (2 - i)^2 a^2 + 4i(1 + i)a^2 \text{ لدينا :}$$

$$\Delta = (ai)^2$$

إن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 :

$$z_1 = \frac{(i - 2)a + ai}{2i} = a(1 + i)$$

$$z_2 = \frac{(i - 2)a - ai}{2i} = ai$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{z_H - z_0}{z_D - z_A} \right) \in i\mathbb{R} \\ \left(\frac{z_H - z_A}{z_D - z_A} \right) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{z_H - z_0}{z_D - z_A} \right) = - \left(\frac{z_H - z_0}{z_D - z_A} \right) \\ \left(\frac{z_H - z_A}{z_D - z_A} \right) = \left(\frac{z_H - z_A}{z_D - z_A} \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{h-0}{ic-1} \right) = - \left(\frac{h-0}{ic-1} \right) \\ \left(\frac{h-1}{ic-1} \right) = \left(\frac{h-1}{ic-1} \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{\bar{h}}{-ic-1} \right) = - \left(\frac{h}{ic-1} \right) \\ \left(\frac{\bar{h}-1}{-ic-1} \right) = \left(\frac{h-1}{ic-1} \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{h}(ic-1) = h(ic+1) \\ (\bar{h}-1)(ic+1) = -(h-1)(ic+1) \end{cases}$$

من المعادلة الثانية من النظام نستنتج ما يلي :

$$\bar{h}(ic-1) = (ic-1) - (h-1)(ic+1)$$

نعوض في المعادلة الأولى نحصل على :

$$(ic-1) - (h-1)(ic+1) = h(ic+1)$$

بعد النشر و التبسيط نحصل على : $2ic - 2h - 2hic = 0$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الغير المنعدم $\frac{i}{2c}$ نحصل على :

$$-1 - \frac{hi}{c} + h = 0$$

$$\Leftrightarrow h - 1 = \frac{hi}{c}$$

نضيف إلى كل من الطرفين العدد $-i$ نحصل على :

$$\Leftrightarrow h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)$$

■ (II) 2 ب

$$h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c) \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{h - (1+i)}{h-c} = \frac{i}{c} \quad \text{يعني :}$$

$$\left(\frac{z_H - z_B}{z_A - z_C} \right) = - \left(\frac{h - (1+i)}{h-c} \right) \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{-i}{c} = - \left(\frac{z_H - z_B}{z_A - z_C} \right)$$

$$(CH) \perp (BH) \quad \text{و منه :}$$



■ (II) 1 ا

لدينا : $A(1)$ و $B(i+1)$ و $C(c)$ و $D(ic)$ و $M(z)$

ننطلق من المعلومة : " A و D و M نقط مستقيمة "

$$\Leftrightarrow (AD) \parallel (AM)$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_M - z_A}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_M - z_A}{z_D - z_A} \right) = \frac{z_M - z_A}{z_D - z_A}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z-1}{ic-1} \right) = \frac{z-1}{ic-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}-1}{-ic-1} = \frac{z-1}{ic-1}$$

$$\Leftrightarrow (ic-1)(\bar{z}-1) + (z-1)(ic+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}ic - ic - \bar{z} + 1 + zic + z - ic - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}(ic-1) + z(ic+1) = 2ic$$

■ (II) 1 ب

$$(AD) \perp (OM) \Leftrightarrow \frac{z_M - z_0}{z_D - z_A} \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_M - z_0}{z_D - z_A} \right) = - \left(\frac{z_M - z_0}{z_D - z_A} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z-0}{ic-1} \right) = - \left(\frac{z-0}{ic-1} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}}{-ic-1} = \frac{-z}{ic-1}$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}(ic-1) = z(ic+1)$$

$$\Leftrightarrow z(ic-1) - \bar{z}(ic-1) = 0$$

■ (II) 2 ا

لدينا H هي المسقط العمودي للنقطة O على (AD)

$$\begin{cases} (AD) \perp (OH) \\ (AD) \parallel (AH) \end{cases} \quad \text{يعني :}$$

التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ 1

باستعمال خوارزمية إقليدس نحدد $195 \wedge 143$ بالطريقة التالية :

$$\begin{array}{r} 195 \quad 143 \\ 52 \quad 1 \end{array}$$

لدينا : $52 \neq 0$ إذن نواصل .

$$\begin{array}{r} 143 \quad 52 \\ 39 \quad 2 \end{array}$$

لدينا : $39 \neq 0$ إذن نواصل .

$$\begin{array}{r} 52 \quad 39 \\ 13 \quad 1 \end{array}$$

لدينا : $13 \neq 0$ إذن نواصل .

$$\begin{array}{r} 39 \quad 13 \\ 0 \quad 3 \end{array}$$

لدينا : $0 = 0$ إذن نتوقف .

إذن القاسم المشترك الأكبر للعديدين 143 و 195 هو آخر باقي غير منعدم : 13

بتعبير آخر : $195 \wedge 143 = 13$ (1)

من النتيجة (1) نستنتج وجود عددين نسبيين k و u بحيث : $143u + 195k = 13$

نضع : $v = -k$ إذن : $143u - 195v = 13$

و بما أن : $13 \wedge 52$ فإن : $(143u - 195v) \wedge 52$

و منه : $52 = (143u - 195v)w$; $(\exists w \in \mathbb{Z})$

أي : $52 = 143 \underbrace{uw}_x - 195 \underbrace{vw}_y$; $(\exists x, y \in \mathbb{Z})$

و بالتالي : $52 = 143x - 195y$; $(\exists x, y \in \mathbb{Z})$

أي أن المعادلة أعلاه تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$.

■ 1 ب

لدينا $(-1, -1)$ حل خاص للمعادلة (E)

يعني : $143(-1) - 195(-1) = 52$ (*)

ليكن (x, y) الحل العام للمعادلة (E) .

يعني : $143x - 195y = 52$ (**)

ننجز عملية الفرق بين المتساويتين (*) و (**) طرفاً بطرف نحصل على :

$$143(-1 - x) - 195(-1 - y) = 0$$

$$143(x + 1) = 195(y + 1) \quad \text{يعني :}$$

$$143 = 11 \times 13 \quad \text{و} \quad 195 = 15 \times 13$$

$$11(x + 1) = 15(y + 1) \quad \text{نحصل على :}$$

$$11 \wedge 15(y + 1) \quad \text{و منه :}$$

و بما أن : $11 \wedge 15 = 1$ فإنه حسب (Gauss) : $11 \wedge (y + 1)$

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) ; y + 1 = 11k \quad \text{و منه :}$$

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) ; y = 11k - 1 \quad \text{أي :}$$

نعوض y في المتساوية (**) نحصل على : $x = 15k - 1$

$$\forall k \in \mathbb{Z} ; 143(15k - 1) - 195(11k - 1) = 52 \quad \text{عكسيا : لدينا}$$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) تكتب على الشكل :

$$\mathcal{S} : \{(15k - 1 ; 11k - 1) ; k \in \mathbb{Z}\}$$

■ 2

لدينا $n \wedge 5 = 1$ بحيث $n \in \mathbb{N}^*$

لدينا 5 عدد أولي و لا يقسم n .

إذن حسب مبرهنة (Fermat) : $n^{5-1} \equiv 1[5]$

$$n^4 \equiv 1[5] \quad \text{يعني :}$$

$$(\forall k \in \mathbb{N}) ; (n^4)^k \equiv 1^k[5] \quad \text{و منه :}$$

$$(\forall k \in \mathbb{N}) ; n^{4k} \equiv 1[5] \quad \text{يعني :}$$

■ 3 أ

$$x \equiv y[4] \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow 4 \mid (x - y)$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) : (x - y) = 4k$$

و منه حسب نتيجة السؤال 2 : $n^{x-y} = n^{4k} \equiv 1[5]$

$$n^x \cdot n^{-y} \equiv 1[5] \quad \text{إذن :}$$

$$n^y \equiv n^y[5] \quad \text{و بما أن :}$$

فإنه عند المرور إلى الجداء بين آخر متوافقتين نحصل على :

$$n^x \cdot n^{-y} \cdot n^y \equiv n^y[5]$$

$$(\otimes) \quad n^x \equiv n^y[5] \quad \text{أي :}$$

■ 3 ب

$$x \equiv y[4] \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) : (x - y) = 4k$$

$$\Leftrightarrow (\exists k' = 2k \in \mathbb{Z}) : (x - y) = 2k'$$

إذن $x - y$ عدد زوجي .

و منه x و y فرديان معا أو زوجيان معا .

نقوم بدمج هاتين الحالتين مع حالتين زوجية العدد n لنحصل على أربع

حالات و كلها تعبر عن زوجية التعبير $(n^x - n^y)$

$$(\text{عدد زوجي}) = (\text{عدد زوجي}) - (\text{عدد زوجي})$$

$$(\text{عدد زوجي}) = (\text{عدد فردي}) - (\text{عدد زوجي})$$

$$(\text{عدد زوجي}) = (\text{عدد زوجي}) - (\text{عدد فردي})$$

$$(\text{عدد زوجي}) = (\text{عدد فردي}) - (\text{عدد فردي})$$



■ (2) i

$$f_n(x) - y = \frac{e^{-x}}{n} > 0 \quad \text{لدينا}$$

إذن المنحنى $(\mathcal{C}_n)$ يوجد فوق المستقيم (D)



■ (3)

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

$$f'_n(x) = 1 - \frac{e^{-x}}{n} = \frac{n - e^{-x}}{n} \quad \text{لدينا :}$$

$$f'_n(x) = 0 \quad \text{إذا كان } x = -\ln n \quad \text{فإن}$$

$$f'_n(x) > 0 \quad \text{إذا كان } x > -\ln n \quad \text{فإن}$$

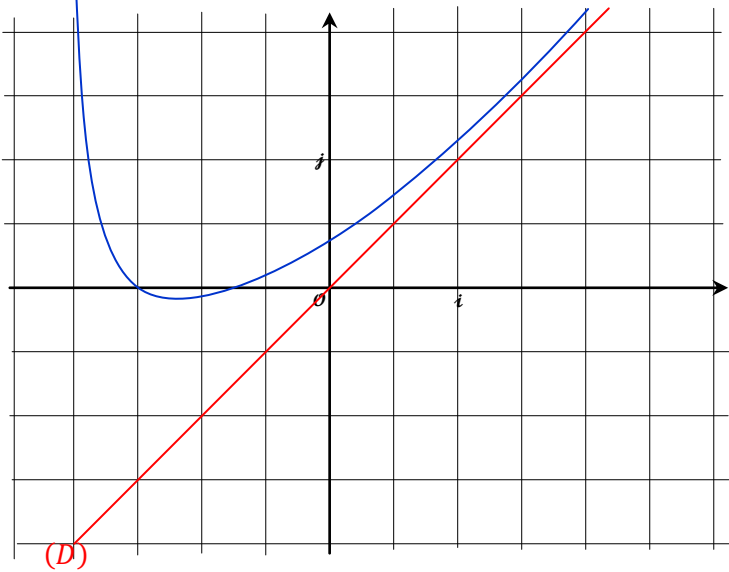
$$f'_n(x) < 0 \quad \text{إذا كان } x < -\ln n \quad \text{فإن}$$

$$f_n(-\ln n) = -\ln n + \frac{1}{n} e^{\ln n} = \ln\left(\frac{e}{n}\right) \quad \text{و لدينا :}$$

x	$-\infty$	$-\ln n$	$+\infty$
$f'_n(x)$		0	$+$
f_n	$+\infty$	$\ln\left(\frac{e}{n}\right)$	$+\infty$

■ (4)

$(\mathcal{C}_3)$



■ (5) i

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$\varphi(x) = \ln x - \frac{e}{x}$$

φ دالة قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ لأنها فرق دالتين

قابلتين للإشتقاق على $]0, +\infty[$

$$\varphi'(x) = \frac{x + e}{x^2} > 0 \quad \text{و لدينا :}$$

إذن φ دالة تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

نستنتج من هاته الحالات الأربع أن العدد $(n^x - n^y)$ عدد زوجي دائماً

و ذلك كيفما كانت زوجية الأعداد x و y و n

$$\text{و منه : } (\exists u \in \mathbb{Z}) ; n^x - n^y = 2u \quad (\odot)$$

من النتيجتين $\otimes$ و $\odot$ نستنتج أن :
 $\{2 \setminus (n^x - n^y)\}$
 $\{5 \setminus (n^x - n^y)\}$

إذن : $2 \times 5 \setminus (n^x - n^y)$ لأن 2 و 5 عددان أوليان.

$$n^x \equiv n^y [10] \quad \text{و بالتالي :}$$

■ (4)

لدينا (x, y) حل للمعادلة (E) .

$$\text{يعني : } (\exists k \in \mathbb{Z}) ; x = 15k - 1 \quad \text{و } y = 11k - 1$$

$$\text{لدينا : } (15k - 1) \equiv (11k - 1) [4] \quad \text{لأن } 4 \setminus (4k)$$

$$\text{و منه : } x \equiv y [4]$$

$$\text{إذن حسب نتيجة السؤال (3) (ب) : } n^x \equiv n^y [10]$$

و هذا يعني أن n^x و n^y لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العدد العشري

$$\text{أو بتعبير آخر نضع : } n^x = \overline{\alpha\beta^{(10)}} \quad \text{و } n^y = \overline{ms^{(10)}}$$

رقم وحدات n^x هو العدد β ورقم وحدات n^y هو s

$$\text{لدينا : } n^x \equiv n^y [10] \quad \text{يعني : } \overline{\alpha\beta^{(10)}} \equiv \overline{ms^{(10)}} [10]$$

$$\text{يعني : } 10m + s \equiv 10\alpha + \beta [10]$$

$$\text{يعني : } s \equiv \beta [10]$$

$$\text{يعني : } s = \beta \quad \text{لأن : } s < 10 \quad \text{و } \beta < 10$$

التمرين الرابع : (5,5 ن)

■ (1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{e^{-x}}{n} \right) = (+\infty) + 0 = (+\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{e^{-x}}{n} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \left(xe^x + \frac{1}{n} \right)$$

$$= (+\infty) \left(0^- + \frac{1}{n} \right) = +\infty$$



■ (2) i

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = -\infty \quad \text{لدينا :}$$

إذن : $(\mathcal{C}_n)$ يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتايب بجوار $-\infty$

$$\text{و لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = 1$$

إذن $y = x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$ للمنحنى $(\mathcal{C}_n)$

المرحلة الثانية:

لدينا دالة متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $]-\infty; -\ln n]$.
 إذن f_n تقابل من $]-\infty; -\ln n]$ نحو صورته $f_n(]-\infty; -\ln n]) = [\ln(\frac{e}{n}); +\infty[$: لدينا
 إذن f_n تقابل من المجال $]-\infty; -\ln n]$ نحو المجال $[\ln(\frac{e}{n}); +\infty[$
 من أجل $n \geq 3$ لدينا $\ln n \geq \ln 3 \approx 1,09$
 إذن : $\ln n > 1$ ومنه : $1 - \ln n < 0$
 ومنه : $\ln(\frac{e}{n}) = 1 - \ln n < 0$ لأن : $\ln(\frac{e}{n}) < 0$
 من هذه النتيجة نستنتج أن : $0 \in [\ln(\frac{e}{n}); +\infty[$
 إذن 0 يمتلك سابقاً واحداً x_n بالتقابل f_n
 أو بتعبير آخر : $\exists! x_n \in]-\infty; -\ln n] : f_n(x_n) = 0$
 أي : $\exists! x_n \leq -\ln n : f_n(x_n) = 0$

■ (5) ج

لدينا : $x_n \leq -\ln n$ يعني : $x_n \leq \ln(\frac{1}{n})$

و لدينا : $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\frac{1}{n}) = -\infty$

إذن بالضرورة : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$

و لدينا : $\frac{-e}{n} \leq y_n \leq 0$

بما أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{-e}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$

فإن : $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

■ (6) د

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1 - x \ln x) = -1 = g(0)$

إذن : دالة متصلة على اليمين في الصفر .

■ (6) ب

لدينا حسب السؤال (5) ب : $f_n(x_n) = 0$

إذن : $x_n + \frac{e^{-x_n}}{n} = 0$ ومنه : $x_n = \frac{-e^{-x_n}}{n}$

أي : $\frac{-1}{x_n} = ne^{x_n}$ (*)

يعني : $g(\frac{-1}{x_n}) = g(ne^{x_n})$

$$= -1 - ne^{x_n} \ln(ne^{x_n})$$

$$= -1 - ne^{x_n} (\ln n + x_n)$$

$$= -1 - \frac{1}{x_n} (\ln n + x_n)$$

$$= -1 + \frac{1}{x_n} (\ln n + x_n)$$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \frac{e}{x}) = +\infty$

و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - \frac{e}{x}) = -\infty$

و لدينا كذلك : $\varphi(3) \approx 0,2 > 0$

نحصل إذن على الجدول التالي :

x	0	3	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	+
φ	$-\infty$	0,2	$+\infty$

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن : $\varphi(x) > 0$; $(\forall x \geq 3)$

إذن : $(\forall n \geq 3) ; \ln n > \frac{e}{n}$

■ (5) ب

المرحلة الأولى:

لدينا دالة تزايدية قطعاً على $[-\ln n ; +\infty[$

من أجل $n \geq 3$ وجدنا أن $\ln n > \frac{e}{n}$ ومنه : $-\ln n < \frac{-e}{n}$

إذن : $[-\frac{e}{n} ; +\infty[\subset [-\ln n ; +\infty[$

أي : دالة تزايدية قطعاً على $[-\frac{e}{n} ; +\infty[$

و بالأخص f_n دالة تزايدية قطعاً على $[-\frac{e}{n} ; 0]$ لأن : $[-\frac{e}{n} ; 0] \subset [-\frac{e}{n} ; +\infty[$

و بالتالي : f_n تقابل من $[-\frac{e}{n} ; 0]$ نحو صورته $f_n([-\frac{e}{n} ; 0])$ (1).

من جهة ثانية لدينا : $f_n(0) = \frac{1}{n} > 0$ لأن : $n \geq 3$ (2)

و لدينا كذلك : $f_n(\frac{-e}{n}) = \frac{-e}{n} + \frac{1}{n} (e^{\frac{-e}{n}})$

لدينا : $n \geq 3$ إذن : $\frac{e}{n} \leq \frac{e}{3}$

و بما أن : $\frac{e}{3} < 1$ فإن : $\frac{e}{n} < 1$

ومنه : $\frac{e^{\frac{e}{n}}}{n} < \frac{e}{n}$ يعني : $(\frac{e^{\frac{e}{n}}}{n} - \frac{e}{n}) < 0$

إذن : $f_n(\frac{-e}{n}) < 0$ (3)

من (2) و (3) نستنتج أن : $f_n(0) \cdot f_n(\frac{-e}{n}) < 0$ (4)

و من (1) و (4) نستنتج حسب مبرهنة القيم الوسيطة أن :

$\exists! y_n \in]-\frac{e}{n} ; 0[: f_n(y_n) = 0$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{x^2} [t]_0^x - \frac{1}{2x^2} [\ln(2t+1)]_0^x \\ &= \frac{1}{x} - \frac{\ln(2x+1)}{2x^2} = F(x) \end{aligned}$$

■ ② ب

لدينا حسب السؤال ① :

$$\frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{2t+1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{2x+1} \leq \frac{t}{2t+1} \leq t$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x^2} \int_0^x \left(\frac{t}{2x+1} \right) dt \leq \frac{2}{x^2} \int_0^x \left(\frac{t}{2t+1} \right) dt \leq \frac{2}{x^2} \int_0^x t dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x^2(1+2x)} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x \leq F(x) \leq \frac{2}{x^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2}{2x^2(1+2x)} \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{2} \right) \frac{2}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1+2x)} \leq F(x) \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1+2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \quad \text{و بما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 1 = F(0) \quad \text{فإن :}$$

و بالتالي : F دالة متصلة على اليمين في الصفر.

■ ③

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\frac{2t}{2t+1} \right) dt &= \int_0^x \underbrace{\left(\frac{2t}{u'} \right)}_{\frac{1}{v}} dt \quad \text{لدينا :} \\ &= \left[\frac{t^2}{2t+1} \right]_0^x - \int_0^x \frac{-2t^2}{(2t+1)^2} dt \\ &= \frac{x^2}{2x+1} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{2t+1} \right)^2 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = -1 + \frac{\ln n}{x_n} + 1 \\ &\Leftrightarrow g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n} \end{aligned}$$

■ ⑥ ج

$$g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n} \quad \text{بما أن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln n}{x_n} \right) \quad \text{فإن :}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ u = \frac{-1}{x_n}}} g(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln n}{x_n} \right)$$

$$\Leftrightarrow g(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln n}{x_n} \right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln n}{x_n} \right) = -1$$

التمرين الخامس : (4,5 ن)

■ ①

ليكن $x \in [0; 1]$ و $t \in [0; x]$

لدينا : $0 \leq t \leq x$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2t \leq 2x$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2t+1 \leq 2x+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{2t+1} \leq 1$$

■ ② ا

ليكن x عنصرا من $]0; 1[$

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right) dt &= \frac{1}{x^2} \int_0^x \left(\frac{2t}{1+2t} \right) dt \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^x \left(\frac{2t+1-1}{1+2t} \right) dt \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^x \left(\frac{2t+1}{1+2t} - \frac{1}{1+2t} \right) dt \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+2t} \right) dt \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^x 1 dt - \frac{1}{2x^2} \int_0^x \left(\frac{2}{2t+1} \right) dt \end{aligned}$$



■ (4) ج

$$F(x) = \frac{2}{x^2} H(x) \quad \text{لدينا :}$$

$$H(x) = \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right) dt \quad \text{بحيث :}$$

نلاحظ أن F دالة متصلة على $[0; x]$ وقابلة للإشتقاق على

$]0; x[$ لأنها جداء الدالتين متصلتين وقابلتين للإشتقاق

إذن حسب مبرهنة التزايديات المنتهية :

$$\exists c \in]0, x[; F'(c) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$$

$$\forall c \in]0, 1[; \frac{-4}{3} \leq F'(c) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2} \quad \text{و بما أن :}$$

$$\frac{-4}{3} \leq F'(c) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2} \quad \text{فإن :}$$

$$0 < c < x < 1 \quad \text{لأن :}$$

$$\frac{-4}{3} \leq \left(\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \right) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2} \quad \text{ومنه :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-4}{3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-4}{3(1+2x)^2} \right) = \frac{-4}{3} \quad \text{بما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \right) = \frac{-4}{3} \quad \text{فإن :}$$

و بالتالي : F دالة قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر.

$$F'_d(0) = \frac{-4}{3} \quad \text{و لدينا :}$$

■ والحمد لله رب العالمين ■



■ (4) ا

$$h : x \rightarrow \frac{x}{1+2x} \quad \text{في البداية لدينا :}$$

و هي دالة متصلة على $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$ و بالأخص على المجال $]0; x[$
بحيث : $0 \leq x \leq 1$

إن h : h تقبل دالة أصلية نرمز لها بالرمز H بحيث : $H'(x) = h(x)$

$$F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right) dt \quad \text{لدينا إذن :}$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \frac{2}{x^2} H(x)$$

$$\Rightarrow F'(x) = \left(\frac{2}{x^2} \right)' H(x) + \left(\frac{2}{x^2} \right) H'(x)$$

$$\Rightarrow F'(x) = \left(\frac{-4x}{x^4} \right) \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right) dt + \left(\frac{2}{x^2} \right) \left(\frac{x}{1+2x} \right)$$

$$\Rightarrow F'(x) = \left(\frac{-2}{x^3} \right) \int_0^x \left(\frac{2t}{1+2t} \right) dt + \frac{2}{x(1+2x)}$$

بعد ذلك نستعمل نتيجة السؤال (3) نحصل على :

$$F'(x) = \left(\frac{-2}{x^3} \right) \left(\frac{x^2}{2x+1} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{2t+1} \right)^2 dt \right) + \frac{2}{x(1+2x)}$$

$$= \frac{-2}{x(1+2x)} - \frac{4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{2t+1} \right)^2 dt + \frac{2}{x(1+2x)}$$

$$F'(x) = \frac{-4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{2t+1} \right)^2 dt \quad \text{و بالتالي :}$$

■ (4) ب

$$\frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{2t+1} \leq 1 \quad \text{لدينا حسب السؤال (1) :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{2x+1} \leq \frac{t}{2t+1} \leq t \quad ; (\forall t \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{t}{2x+1} \right)^2 \leq \left(\frac{t}{2t+1} \right)^2 \leq t^2$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x \left(\frac{t}{2x+1} \right)^2 dt \leq \int_0^x \left(\frac{t}{2t+1} \right)^2 dt \leq \int_0^x t^2 dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{2x+1} \right)^2 dt \geq F'(x) \geq \frac{-4}{x^3} \int_0^x t^2 dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4}{x^3(1+2x)^2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^x \geq F'(x) \geq \frac{-4}{x^3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4}{3(1+2x)^2} \geq F'(x) \geq \frac{-4}{3}$$