

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 9
مدة الانجاز : أربع ساعات

المملكة المغربية



وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحانات الوطنية الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2012

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,5 ن) (I) في الحلقة الواحدة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ نعتبر المصفوفتين A و B المعرفتين بما يلي :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

① أحسب : A^2 و $B - A$ ن 0,75

② استنتج أن A تقبل مقلوبا يتم تحديده . ن 0,50

(II) لكل عددين حقيقيين a و b من المجال $]1, +\infty[$ نضع : $a * b = \sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2}$

① تحقق أن : $x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ن 0,25

② بين أن : $*$ قانون تركيب داخلي في I ن 0,50

③ نذكر أن : $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ زمرة تبادلية . ن 0,50

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow I \\ x &\longrightarrow \sqrt{x+1} \end{aligned}$$

نعتبر التطبيق :

① بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ إلى $(I, *)$. ن 0,50

② استنتج بنية $(I, *)$. ن 0,25

③ بين أن المجموعة : $\Gamma = \{\sqrt{1+2^m}/m \in \mathbb{Z}\}$ زمرة جزئية من $(I, *)$ ن 0,75



الجزءان الأول والثاني مستقلان.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\sigma, \vec{u}, \vec{v})$

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : (E) حيث : a عدد عقدي غير منعدم .

$$(E) : iZ^2 + (2-i)aZ - (1+i)a^2 = 0$$

① حدد Z_1 و Z_2 حلي المعادلة (E) . ن 0,75

② ① تحقق أن : $Z_1 Z_2 = a^2(i-1)$ ن 0,25

② بين أن : $Z_1 Z_2$ عدد حقيقي ن 0,50

$$\arg a = \frac{-3\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2} \right] \Leftrightarrow$$



(II) ليكن c عددا عقديا غير منعدم و z عدد عقدي غير منعدم .

① ① ن 0,50 نعتبر النقط A و B و C و D و M التي أحاقها على التوالي هي : 1 و $(i+1)$ و c و ic و z .

② ② ن 0,50 بين أن : A و D و M نقط مستقيمية $\Leftrightarrow (ic+1)z + (ic-1)\bar{z} = 2ic$

③ ③ ن 0,50 بين أن : $(AD) \perp (OM) \Leftrightarrow (ic+1)z - (ic-1)\bar{z} = 0$

ليكن h لحق النقطة H : المسقط العمودي للنقطة σ على (AD) .

④ ④ ن 0,75 بين أن : $h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)$

⑤ ⑤ ن 0,25 استنتج أن : $(CH) \perp (BH)$

التمرين الثالث : (3,0 ن) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $143x - 195y = 52$: (E)

① ① ن 0,50 حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 195 و 143 . و استنتج أن المعادلة (E) تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$.

② ② ن 0,75 علما أن : $(-1; -1)$ حل خاص لـ (E) . أوجد الحل العام لـ (E) في $\mathbb{Z}^2$

③ ③ ن 0,50 ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم وأولي مع العدد 5 بين أن : $n^{4k} \equiv 1[5] \forall k \in \mathbb{N}$

④ ④ ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث : $x \equiv y[4]$



⑤ ⑤ ن 0,50 بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^x \equiv n^y[5]$

⑥ ⑥ ن 0,50 استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^x \equiv n^y[10]$

⑦ ⑦ ن 0,25 ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث يكون الزوج (x, y) حلا للمعادلة (E) .

بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$: العددين n^x و n^y لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري .

التمرين الرابع : (5,5 ن) n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

ليكن $(\mathcal{E}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\sigma, \vec{i}, \vec{j})$.

① ① ن 0,50 أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

② ② ن 0,50 أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{E}_n)$ بجوار $-\infty$.

③ ③ ن 0,50 بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{E}_n)$ بجوار $+\infty$

و حدد الوضع النسبي لـ $(\mathcal{E}_n)$ و (D)



④ ④ ن 0,75 أدرس تغيرات الدالة f_n ثم ضع جدول تغيراتها.

⑤ ⑤ ن 0,50 أنشئ المنحنى $(\mathcal{E}_3)$ نأخذ : $f_3(-1,5) \approx 0$ و $\ln 3 = 1,1$ و $f_3(-0,6) \approx 0$

⑥ ⑥ ن 0,25 بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن : $\frac{e}{n} < \ln(n)$

⑦ ⑦ ن 1,00 بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين x_n و y_n حيث :

$$\frac{-e}{n} \leq y_n \leq 0 \quad \text{و} \quad x_n \leq -\ln(n)$$

ج) أحسب : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 0,50 ن

6) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} g(x) = -1 - x \ln x \\ g(0) = -1 \end{cases}$ 0,25 ن

أ) بين أن الدالة g متصلة على اليمين في 0 0,50 ن

ب) تحقق أن لكل $n \geq 3$ $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$ 0,50 ن

ج) استنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{x_n}$ 0,25 ن

التمرين الخامس : (4,5 ن)

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $[0,1]$ بما يلي : $\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2}, \forall x \in]0,1] \\ F(0) = 1 \end{cases}$

① ليكن x عنصرا من المجال $[0,1]$ بين أنه مهما يكن t من المجال $[0, x]$ لدينا : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$ 0,25 ن

② ليكن x عنصرا من المجال $]0,1]$



أ) بين أن $F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt$ 0,50 ن

ب) بين أن $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$ ثم استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في 0 0,75 ن

③ باستعمال تقنية المكاملة بالأجزاء بين أن : 0,75 ن

$$\forall x \in [0,1] : \int_0^x \frac{2t}{1+2t} dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$$

④ ليكن x عنصرا من المجال $]0,1]$

أ) بين أن : $F'(x) = \frac{-4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$ 0,50 ن

ب) بين أن : $\frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$ 0,75 ن

ج) بتطبيق مبرهنة التزايد المتناهية على الدالة F في المجال $[0, x]$ بين أن : 0,75 ن

$$\frac{-4}{3} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$



د) استنتج أن الدالة F قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 محددا عددها المشتق على اليمين في 0 0,25 ن