

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 9
مدة الانجاز : أربع ساعات

المملكة المغربية



وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي
والتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والإمتحانات

الإمتحانات الوطنية الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2011

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

الجزءان الأول و الثاني مستقلان

التمرين الأول : (4,0 ن)

(I) في الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ نعتبر المصفوفتين $\mathbb{A}$ و $\mathbb{I}$ المعرفتين بما يلي :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نضع : $\forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}$ و $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ و $\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}$ و $\mathbb{A}^0 = \mathbb{I}$

① بين أن : $\forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{A}^{2k} = \mathbb{I}$ 0,50 ن

② بين أن المصفوفة $\mathbb{A}$ تقبل مقلوبا $\mathbb{A}^{-1}$ ينبغي تحديده. 0,50 ن

ليكن α عددا حقيقيا موجبا قطعيا .

لكل x و y من المجال $I =]\alpha, +\infty[$ نضع : $x * y = (x - \alpha)(y - \alpha) + \alpha$

① أ بين أن : * قانون تركيب داخلي في I 0,50 ن

ب بين أن القانون * تبادلي و تجميعي 0,50 ن

ج بين أن المجموعة $(I, *)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده 0,50 ن

② بين أن المجموعة $(I, *)$ زمرة تبادلية 0,50 ن

③ نعتبر التطبيق : $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$
 $x \longrightarrow \frac{1}{x - \alpha}$

أ بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(I, *)$ إلى $(\mathbb{R}_+^*, \times)$. 0,50 ن

ب حل في المجموعة I المعادلة : $x^{(3)} = \alpha^3 + \alpha$ بحيث : $x^{(3)} = x * x * x$ 0,50 ن

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن N العدد الصحيح الطبيعي الممثل في نظمة العد العشري بما يلي :
 $N = \underbrace{111 \dots 11}_{\text{1010 مرة 1}}$

① بين أن N يقبل القسمة على العدد 11 0,25 ن

② أ تحقق أن العدد 2011 أولي , و أن : $10^{2010} - 1 = 9N$ 0,75 ن

ب بين أن العدد 2011 يقسم العدد $9N$ 0,50 ن

ج استنتج أن العدد 2011 يقسم العدد N . 0,50 ن

③ بين أن العدد N يقبل القسمة على العدد 22121 . 0,50 ن

الجزء الأول والثاني مستقلان

التمرين الثالث : (3,5 ن)

(I) ليكن m عددا عقديا غير منعدم . نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E_m) : z^2 + [(1-i)m - 4]z - im^2 - 2(1-i)m + 4 = 0$$

① تحقق أن العدد $z_1 = 2 - m$ حل للمعادلة (E_m) .

0,50 ن

② ليكن z_2 الحل الثاني للمعادلة (E_m) .

① بين أن $z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow im^2 + 2(1-i) - 3 = 0$

0,50 ن

② حدد قيمتي m بحيث $z_1 z_2 = 1$

1,00 ن

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\sigma, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر التطبيق S الذي يربط النقطة M التي لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z' بحيث : $z' = -(z-1) + 1$ و الدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه النقطة Ω ذات اللق $(1+i)$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$ و ليكن z'' لحق النقطة M'' صورة M بالدوران $\mathcal{R}$.

① ① بين أن التطبيق S هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة ذات اللق 1

0,25 ن

② بين أن : $z'' = iz + 2$.

0,25 ن

② نفترض أن النقطة M تخالف O أصل المعلم و لتكن A النقطة التي لحقها 2

① أحسب $\frac{z''-2}{z'-2}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $AM'M''$

0,50 ن

② حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و Ω و M' و M'' متداورة .

0,50 ن



التمرين الرابع : (6,5 ن)

(I) دراسة الحلول الموجبة للمعادلة $e^x = x^n$: (E) بحيث $n \in \mathbb{N}^*$.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة : $\mathcal{D} = [0,1[\cup]1, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\sigma, \vec{i}, \vec{j})$.

① تحقق أنه لكل x من المجموعة $[0,1[\cup]1, +\infty[$ لدينا : $(e^x = x^n \Leftrightarrow n = f(x))$.

0,25 ن

② بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 .

0,50 ن

③ أحسب النهايات التالية ثم أول هندسيا النتائج المحصل عليها :

1,50 ن

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

④ أدرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $[0,1[$ و $]1, +\infty[$ ثم إعط جدول تغيراتها .

0,75 ن

⑤ بين أن $(\mathcal{C})$ يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج إحداثياتها .

0,50 ن



⑥ أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$

0,50 ن

⑦ بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة (E) تقبل بالضبط حلين اثنين α_n و b_n بحيث $1 < \alpha_n < e < b_n$.

0,50 ن

(II) دراسة تقارب المتتاليتين $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ و $(b_n)_{n \geq 3}$.

① بين أن $b_n \geq n$ ($\forall n \geq 3$) ثم استنتج نهاية المتتالية $(b_n)_{n \geq 3}$

0,50 ن

② ① بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة.

0,50 ن

② ② بين أن $\frac{1}{n} < \ln(\alpha_n) < \frac{e}{n}$ ($\forall n \geq 3$) ثم استنتج نهاية المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 3}$.

0,50 ن

③ بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = e$

0,50 ن

التمرين الخامس: (3,5 ن)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$



① ① بين أن : $0 \leq F(x) \leq x e^{-x^2}$ ($\forall x \geq 0$).

0,50 ن

② ② بين أن : $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ ($\forall x \geq 1$) ثم استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$.

0,50 ن

③ ③ بين أن : F قابلة للإشتقاق على $[0, +\infty[$ وأن : $F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$ ($\forall x \geq 0$).

0,50 ن

④ ④ نعتبر الدالة العددية G المعرفة على $[0, \frac{\pi}{2}]$ بما يلي :

$$\begin{cases} G(x) = F(\tan x) \\ G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

① ① بين أن الدالة G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$.

0,25 ن

② ② بين أنه يوجد عدد حقيقي c ينتمي إلى المجال $]0, +\infty[$ بحيث : $F'(c) = 0$ وأن $F(c) = \frac{1}{2c} e^{-2c^2}$.

0,75 ن

(يمكن تطبيق مبرهنة رول بالنسبة للدالة G على المجال $[0, \frac{\pi}{2}]$)

④ ④ نعتبر الدالة العددية H المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$H(x) = F'(x) \frac{e^{x^2}}{2x}$$



① ① بين أن الدالة H تناقصية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$.

0,50 ن

② ② استنتج أن العدد c وحيد ثم إعط جدول تغيرات الدالة F .

0,50 ن