

التمرين الأول : (3,3 ن)

■ (I) 1

لنبين أن * قانون تبادلي في المجموعة I .

ليكن a و b عنصرين من I .

$$\begin{aligned} a * b &= e^{\ln(a) \cdot \ln(b)} \\ &= e^{\ln(b) \cdot \ln(a)} \\ &= b * a \end{aligned}$$

و منه : $a * b = b * a$ يعني : * قانون تبادلي في I .

لنبين أن * قانون تجميعي في المجموعة I .

ليكن a و b و c ثلاث عناصر من I .

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= e^{\ln(a) \cdot \ln(b * c)} \\ &= e^{\ln(a) \cdot \ln(e^{\ln(b) \cdot \ln(c)})} \\ &= e^{\ln(a) \cdot \ln(b) \cdot \ln(c)} \\ &= e^{\ln(e^{\ln(a) \cdot \ln(b)}) \cdot \ln(c)} \\ &= e^{\ln(a * b) \cdot \ln(c)} \\ &= (a * b) * c \end{aligned}$$

إذن القانون * تجميعي في المجموعة I .

■ (2)

ليكن e العنصر المحايد للقانون * في المجموعة I

و هذا يعني : $(\forall a \in I) ; a * e = e * a = a$

لتحديد قيمة e ننتقل من إحدى المتساويتين $a * e = a$ أو $e * a = a$

الكتابة : $a * e = a$.

$$e^{\ln(a) \cdot \ln(e)} = a$$

$$\ln(a) \cdot \ln(e) = \ln(a)$$

$$\ln(e) = \frac{\ln(a)}{\ln(a)} = 1$$

$$e = e^1$$

نتأكد من أن ينتمي إلى المجال $]0; +\infty[$

بالفعل $e \approx 2,72$ أكبر قطعاً من 0

$$e \in I$$

و منه القانون يقبل عنصراً محايداً و هو العدد e

■ (3) أ

ليكن a و b عنصرين من المجموعة $I \setminus \{1\}$.

هذا يعني أن $a \neq 1$ و $b \neq 1$

و منه : $\ln(a) \neq 0$ و $\ln(b) \neq 0$

$$\ln(a) \cdot \ln(b) \neq 0$$

$$e^{\ln(a) \cdot \ln(b)} \neq 1$$

نستنتج أن : $e^{\ln(a) \cdot \ln(b)} > 0$ و $e^{\ln(a) \cdot \ln(b)} \neq 1$

و هذا يعني بكل بساطة أن : $e^{\ln(a) \cdot \ln(b)} \in I \setminus \{1\}$

$$a * b \in I \setminus \{1\}$$

و منه * قانون تركيب داخلي في المجموعة $I \setminus \{1\}$

تبادلية و تجميعية القانون * في المجموعة $I \setminus \{1\}$

نستنتج من المجموعة $I \setminus \{1\}$ لأن $I \setminus \{1\}$ جزء من I

بما أن القانون * تبادلي و تجميعي في I فإن * تبادلي و تجميعي

كذلك في المجموعة $I \setminus \{1\}$ لأن $I \setminus \{1\} \subset I$

لدينا e هو العنصر المحايد للقانون * في المجموعة I

إذن e هو العنصر المحايد للقانون * في المجموعة $I \setminus \{1\}$

$$e \in I \setminus \{1\} \text{ أي } e \neq 1$$

ليكن a عنصراً من المجموعة $I \setminus \{1\}$

x مقلوب للعنصر a في المجموعة $I \setminus \{1\}$

$$a * x = x * a = e$$

$$a * x = e$$

هذا يعني أن $e^{\ln(a) \cdot \ln(x)} = e$ و منه : $\ln(a) \cdot \ln(x) = 1$

$$\text{أي : } \ln(x) = \frac{1}{\ln(a)} \text{ يعني : } x = e^{\frac{1}{\ln(a)}}$$

بما أن : $a \in I \setminus \{1\}$ فإن $a \neq 1$

و هذا يعني أن : $\ln(a) \neq 0$

$$\frac{1}{\ln(a)} \neq 0 \text{ و منه : } \frac{1}{\ln(a)} \neq 0$$

$$\text{أي : } e^{\frac{1}{\ln(a)}} \in I \setminus \{1\}$$

نستنتج أن كل عنصر a من المجموعة $I \setminus \{1\}$ يقبل

مقلوباً $e^{\frac{1}{\ln(a)}}$ من نفس المجموعة $I \setminus \{1\}$

خلاصة : لقد تمكنا من أن نبرهن على أن * قانون تركيب داخلي في

المجموعة $I \setminus \{1\}$ و له عنصر محايد e و كل عنصر a يقبل

مقلوباً $e^{\frac{1}{\ln(a)}}$ في المجموعة $I \setminus \{1\}$

و بالتالي $(I \setminus \{1\}, *)$ زمرة تبادلية.

■ (3) ب

أولاً ، نلاحظ أن $]1; +\infty[\subset I \setminus \{1\}$

$$\text{لأن : } I \setminus \{1\} =]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$\text{و كذلك : }]1; +\infty[\neq \emptyset$$

و هذا يعني أن $]1; +\infty[$ جزء غير منعدم من المجموعة $I \setminus \{1\}$

■ (4) ب

لدينا I جزء غير منعدم من $\mathbb{R}^*$

ليكن x و y عنصرين من I

إذن : $x > 0$ ز $y > 0$. ومنه : $\frac{x}{y} > 0$ أي : $x \times y^{-1} > 0$.

إذن : $(x \times y^{-1}) \in I$

إذن $(I, \times)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}^*, \times)$.

و لدينا حسب السؤال (4) i : * توزيعي بالنسبة لـ $\times$.

و لدينا كذلك : حسب السؤال (3) i $(I \setminus \{1\}, *)$ زمرة تبادلية .

و بالتالي $(I, \times, *)$ جسم تبادلي .

■ (II) 1

بعد الحساب سوف تحصل على النتائج التالية :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■ (2)

تفترض أن A تقبل مقلوبا A^{-1} في المجموعة $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

إذن : $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$.

بحيث : $\times$ هو ضرب المصفوفات و I هي المصفوفة : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ننتقل من الكتابة $A \times A^{-1} = I$

نضرب طرفي هذه المتساوية في A^2 نحصل على : $A^3 \times A^{-1} = A^2$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{إذن :}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و هذا تناقض واضح لأن :}$$

و بالتالي المصفوفة A لا تقبل مقلوبا في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

التمرين الثاني : (3,5 ن)

■ (1) i

ليكن العدد العقدي $x + iy$ جذرا مربعا للعدد العقدي $3 + 4i$

هذا يعني أن : $(x + iy)^2 = 3 + 4i$ —————

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + i(2xy) = 3 + 4i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

من المعادلة الثانية نحصل على : $x^2 = \frac{4}{y^2}$

نعوض x^2 في المعادلة الأولى نجد : $\frac{4}{y^2} - y^2 = 3$

$$y^4 + 3y^2 - 4 = 0 \quad \text{يعني :}$$

يكفي الآن أن نبرهن على أنه إذا كان a و b عنصرين من $]1, +\infty[$

فإن : $[1, +\infty[a * b' \in I \setminus \{1\}$ بحيث b' هو مقلوب b في $I \setminus \{1\}$

$$\begin{aligned} a * b' &= a * \left(e^{\frac{1}{\ln b}}\right) \\ &= e^{\ln(a) \cdot \ln\left(e^{\frac{1}{\ln b}}\right)} \\ &= e^{\ln(a) \cdot \frac{1}{\ln(b)}} \\ &= e^{\frac{\ln(a)}{\ln(b)}} \end{aligned}$$

من جهة أخرى لدينا : $a \in]1, +\infty[$ و $b \in]1, +\infty[$

يعني $a > 1$ و $b > 1$

يعني $\ln a > 0$ و $\ln b > 0$ يعني : $\frac{\ln(a)}{\ln(b)} > 0$

إذن : $e^{\frac{\ln(a)}{\ln(b)}} \in]1, +\infty[$ ومنه $e^{\frac{\ln(a)}{\ln(b)}} > 1$

يعني : $a * b' \in]1, +\infty[$

الوضعية التي نتوفر عليها الآن هي $(I \setminus \{1\}, *)$ زمرة تبادلية .

$]1, +\infty[$ جزء غير منعدم من المجموعة $I \setminus \{1\}$

$(\forall (a, b) \in]1, +\infty[; a * b' \in]1, +\infty[$

نستنتج من هذه الوضعية أن $(]1, +\infty[, *)$ زمرة جزئية للزمرة $(I \setminus \{1\}, *)$.

■ (4) i

ليكن a و b و c ثلاث عناصر من المجموعة I .

يكون * توزيعيا بالنسبة للقانون $\times$ إذا كان :

$$\begin{cases} a * (b \times c) = (a * b) \times (a * c) \\ ((a \times b) * c = (a * c) \times (b * c)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a * (b \times c) &= e^{\ln(a) \cdot \ln(b \times c)} \\ &= e^{\ln(a) \cdot (\ln(b) + \ln(c))} \\ &= e^{\ln(a) \cdot \ln(b) + \ln(a) \cdot \ln(c)} \\ &= e^{\ln(a) \cdot \ln(b)} \times e^{\ln(a) \cdot \ln(c)} \\ &= (a * b) \times (a * c) \end{aligned}$$

و بما أن القانون * تبادلي نستنتج المتساوية الأخرى

و بالتالي : القانون * توزيعي بالنسبة للقانون $\times$

■ (2) ب

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{0-a} &= -\frac{b}{a} + 1 \quad \text{لدينا :} \\ &= -(1-i) + 1 \\ &= i \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\frac{b-a}{0-a} = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{AO} = 1 \\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AO \\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

و بالتالي المثلث AOB متساوي الساقين و قائم الزاوية في النقطة O

■ (3) ا

$$B \xrightarrow{R_c\left(\frac{\pi}{2}\right)} D \quad \text{لدينا :}$$

$$(d-c) = e^{i\frac{\pi}{2}}(b-c) \quad \text{إذن حسب التعريف العقدي للدوران :}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow d &= c + i(b-c) \\ \Leftrightarrow d &= c + ib - ic \\ \Leftrightarrow c(1-i) &= d - ib \\ \Leftrightarrow c(1-i) &= d - i\left(\frac{3}{2}i + \frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow c(1-i) &= d + \frac{3}{2} - \frac{i}{2} \\ \Leftrightarrow c &= \left(\frac{1}{1-i}\right)d + \left(\frac{\frac{3}{2}-\frac{i}{2}}{1-i}\right) \\ \Leftrightarrow c &= \frac{1}{2}(1+i)d + \left(1 + \frac{i}{2}\right) \end{aligned}$$

■ (3) ب

$$D \xrightarrow{T_{\overrightarrow{AO}}} L \quad \text{لدينا :}$$

$$\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AO} \quad \text{إذن حسب تعريف الإزاحة :}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (\ell - d) &= (0 - a) \\ \Leftrightarrow \left(\ell + (i-1)c + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \right) &= -a \\ \Leftrightarrow \ell + (i-1)c + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i &= \frac{1}{2} - i \\ \Leftrightarrow \ell &= (1-i)c - \frac{i}{2} - 1 \end{aligned}$$

$$t^2 + 3t - 4 = 0 \quad \text{نضع : } t = y^2 \quad \text{نحصل على :}$$

$$t_2 = -4 \quad \text{و} \quad t_1 = 1 \quad \text{هذه المعادلة تقبل الحلين}$$

$$\text{الحل } t_1 \text{ يمدنا بـ } y = 1 \text{ أو } y = -1 .$$

$$\text{والحل } t_2 \text{ يمدنا بـ } y = 2i \text{ أو } y = -2i .$$

إذن المعادلة : $y^4 + 3y^2 - 4 = 0$ تقبل أربعة حلول. نعوض كل قيمة لـ y في النطمة لإيجاد قيمة x الموافقة.

$$\begin{aligned} \text{إذا كان } y = 1 \text{ فإن : } x &= 2 \\ \text{إذا كان } y = -1 \text{ فإن : } x &= -2 \\ \text{إذا كان } y = 2 \text{ فإن : } x &= -i \\ \text{إذا كان } y = -2 \text{ فإن : } x &= i \end{aligned}$$

بعد ذلك نكتب الجذور المربعة التي حصلنا عليها و هي :

$$\begin{aligned} \text{في الحالة الأولى : } x + iy &= 2 + i \\ \text{في الحالة الثانية : } x + iy &= -2 - i \\ \text{في الحالة الثالثة : } x + iy &= -2 - i \\ \text{في الحالة الرابعة : } x + iy &= 2 + i \end{aligned}$$

و بالتالي : $(3 + 4i)$ يقبل جذرين مربعين فقط و هما : $(2 + i)$ و $(-2 - i)$

■ (1) ب

$$\text{نحل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة : } 4z^2 - 10iz - 7 - i = 0 \quad (E)$$

$$\text{بعد حساب المميز } \Delta \text{ نجد : } \Delta = 4(3 + 4i)$$

لدينا حسب السؤال (1) ا : $(3 + 4i)$ يقبل جذرين مربعين فقط و هما : $(2 + i)$ و $(-2 - i)$

$$\text{نختار } (2 + i) \quad \text{نحصل على : } \Delta = [2(2 + i)]^2$$

و منه (E) تقبل الحلين a و b كما يلي :

$$b = \frac{3}{2}i + \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad a = i - \frac{1}{2}$$

عندما نختار الجذر المربع الثاني لـ $(3 + 4i)$ نحصل على نفس النتيجة.

■ (2) ا

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } a(1-i) &= \left(i - \frac{1}{2}\right)(1-i) \\ &= i + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \\ &= b \end{aligned}$$

■ (3 ج)

$$\frac{\ell - c}{a - c} = \frac{(1 - i)c - 1 - \frac{i}{2} - c}{i - \frac{1}{2} - c} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{-ic - 1 - \frac{i}{2}}{i - \frac{1}{2} - c} = \frac{i(-c + i - \frac{1}{2})}{i - \frac{1}{2} - c} = i$$

$$\frac{\ell - c}{a - c} = i = e^{\frac{i\pi}{2}} \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{CL}{CA} = 1 \\ \left(\overline{CA}, \overline{CL} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

و بالتالي المثلث ALC متساوي الساقين و قائم الزاوية في النقطة C

التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ (1)

في البداية وجب التذكير بخاصيتين هامتين :

الخاصية الأولى : في $\mathbb{Z}$ ، إذا كان a يقسم b و c فإنه يقسم كل تاليفة خطية لهما: $(ub + vc)$.

بتعبير آخر : $\{a/b, a/c\} \Rightarrow (\forall u, v \in \mathbb{Z}) : a/(ub + vc)$

الخاصية الثانية (un premier qui divise un produit)

كل عدد أولي يقسم جداء عددين فإنه بالضرورة يقسم أحدهما.

بتعبير آخر : $\{p \in \mathbb{P} : p/ab\} \Rightarrow (p/a) \text{ أو } (p/b)$

ننتقل إذن من الكتابة : $m^2 + 1 \equiv 0[5]$

$$\Leftrightarrow 5 / (m^2 + 1)$$

و نعلم أن $5 / (-5)$

إذن حسب الخاصية الأولى : $5 / (m^2 + 1 - 5)$

يعني : $5 / (m - 2)(m + 2)$

بما أن 5 عدد أولي فإنه حسب الخاصية الثانية :

$$5/(m - 2) \text{ أو } 5 / (m + 2)$$

و منه حسب الخاصية الأولى :

$$5/(m - 2) \text{ أو } 5 / (m + 2 - 5)$$

يعني : $m \equiv 3[5] \text{ أو } m \equiv 2[5]$

في المجموعة $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ نكتب $m \in \{\bar{2}, \bar{3}\}$

■ (2 أ)

ليكن p عددا أوليا و k و n عددين صحيحين طبيعيين

$$n^2 + 1 \equiv 0[p] \quad \text{ننتقل إذن من الكتابة :}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow n^2 &\equiv -1[p] \\ \Leftrightarrow (n^2)^{(عدد فردي)} &\equiv (-1)^{(عدد فردي)}[p] \\ \Leftrightarrow (n^2)^{(2k+1)} &\equiv -1[p] \end{aligned}$$

■ (2 ب)

لدينا حسب السؤال (أ) $(n^2)^{(2k+1)} \equiv -1[p]$

$$\Leftrightarrow (\exists u \in \mathbb{Z}) : (n^2)^{(2k+1)} + 1 = pu$$

$$\Leftrightarrow (\exists u \in \mathbb{Z}) : pu + n \underbrace{(-n^{4k})}_v = 1$$

$$\Leftrightarrow (\exists u, v \in \mathbb{Z}) : pu + nv = 1$$

و بالتالي حسب Bezout : $n \wedge p = 1$

■ (2 ج)

لدينا p عدد أولي و $n \wedge p = 1$

إذن حسب مبرهنة Fermat : $n^{p-1} \equiv 1[p]$

و نعلم أن $p = 4k + 3$ إذن : $(n^2)^{2k+1} \equiv 1[p]$

■ (2 د)

باستعمال البرهان بالخلف نفترض وجود العدد n بحيث : $n^2 + 1 \equiv 0[p]$

$$\begin{cases} (n^2)^{2k+1} \equiv -1[p] \\ (n^2)^{2k+1} \equiv 1[p] \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

و منه : $1 \equiv -1[p]$ أي : $p / 2$

بما أن p عدد أولي و يقسم العدد الأولي 2 فإن : $p = 2$

و هذا مستحيل لأنه لا وجود لعدد صحيح طبيعي k يحقق $4k + 3 = 2$

و بالتالي لا وجود لعدد صحيح طبيعي n يحقق : $n^2 + 1 \equiv 0[p]$

التمرين الرابع : (6,25 ن)

1 ■

$$\frac{e^x}{x} \xrightarrow{+\infty} +\infty \quad \text{نعلم أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 4xe^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x}\right) \times \frac{1}{\left(\frac{e^{x^2}}{x^2}\right)} \quad \text{لدينا :}$$

نضع :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{\sqrt{t}}\right) \times \frac{1}{\left(\frac{e^t}{t}\right)} = 0 \quad \text{إذن النهاية تصبح :}$$

2 ■

$$f'(x) = 4e^{-x^2} + (4x)(-2xe^{-x^2}) \quad \text{لدينا :}$$

$$= (1 - 2x^2)(4e^{-x^2})$$

بما أن : $4e^{-x^2} > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $1 - 2x^2$

$$\text{إذا كان : } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{فإن } f'(x) = 0$$

$$\text{إذا كان : } x > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{فإن } f'(x) < 0$$

$$\text{إذا كان : } x < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{فإن } f'(x) > 0$$

و نلخص النتائج في الجدول التالي :

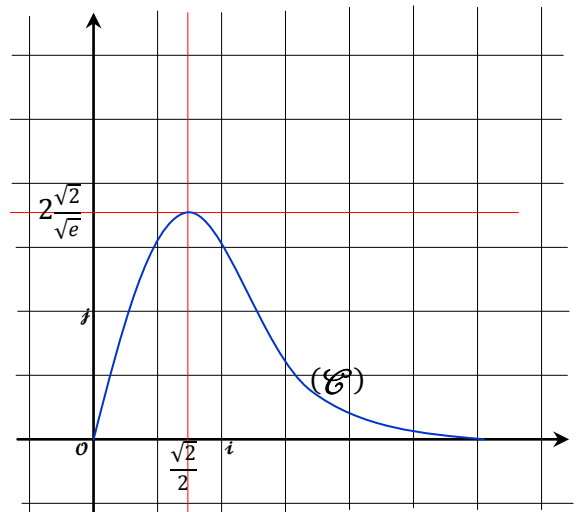
x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$	0

3 ■

معادلة المماس لـ $(\mathcal{C})$ في النقطة O هي :

$$(\Delta) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$\text{يعني : } (\Delta) : y = 4x \quad \text{مع } x \geq 0$$



4 ■

$$(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2} \quad \text{لاحظ أن :}$$

$$-2(e^{-x^2})' = 4xe^{-x^2} \quad \text{يعني :}$$

$$\int_0^1 4xe^{-x^2} dx = -2[e^{-x^2}]_0^1 \quad \text{إذن :}$$

$$= -2(e^{-1} - 1)$$

$$= 2(1 - e^{-1}) = a$$

مساحة الحيز S تقاس باستعمال التكامل التالي :

$$S = \int_0^1 f(x) dx$$

بما أن : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ فإن العدد $2(1 - e^{-1})$ يعني في الواقع $2unités(1unité - e^{-1}unité)$

في هذا التمرين لدينا : $1unité = 2cm$ إذن $a = 8(1 - e^{-1}) cm^2$

الجزء الثاني

1 ■

ليكن x عددا حقيقيا أكبر من أو يساوي 1

$$\begin{aligned} x > 1 &\Rightarrow x^2 > x \quad \text{لدينا :} \\ &\Rightarrow -x^2 < -x \\ &\Rightarrow e^{-x^2} < e^{-x} \end{aligned}$$

لأن الدالة $x \rightarrow e^x$ تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$

1 ■

$$\text{لدينا : } (\forall x > 1) : 0 < e^{-x^2} < e^{-x}$$

$$\text{إذن : } (\forall x > 1) : 0 < 4x^n e^{-x^2} < 4x^n e^{-x}$$

من جهة أخرى لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{\frac{-nx}{n}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(xe^{\frac{-x}{n}}\right)^n \\ &= \lim_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ u = \frac{x}{n}}} (-nue^u)^n = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x^2} = 0 \quad \text{بنفس الطريقة نبين أن :}$$

$$(\forall x > 1) : 0 < 4x^n e^{-x^2} < 4x^n e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{و منه :}$$

جميع النتائج المحصل عليها لحد الآن تخول لنا استعمال مبرهنة القيم الوسيطة

و بالتالي : يوجد عدد حقيقي وحيد u_n محصور بين 0 و 1

و يحقق : $g_n(u_n) = 0$

أو بتعبير آخر : المعادلة $f_n(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا u_n من المجال $]0,1[$

■ (4) i

لدينا : $f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}$

$$\Rightarrow f_{n+1}(x) = 4x^{n+1} e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(x) = x(4x^n e^{-x^2})$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(x) = x f_n(x)$$

و منه : $f_{n+1}(u_n) = u_n \cdot f_n(u_n)$

لدينا حسب السؤال (3) $f_n(u_n) = 1$

إذن : $f_{n+1}(u_n) = u_n \cdot 1 = u_n$

■ (4) ب

لدينا f_n دالة متصلة و تزايدية قطعاً على $[0,1]$.

و لدينا كذلك : $u_n < 1$ لأن $u_n \in]0,1[$

إذن : $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$

لأن : $f_{n+1}(u_n) = u_n$ حسب السؤال (4) i

و : $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$ حسب السؤال (3)

و بما أن f_{n+1} تقابل (متصلة و تزايدية قطعاً على $[0,1]$)

فإن : $u_n < u_{n+1}$

و منه $(u_n)_n$ متتالية تزايدية . و بما أنها مكبورة

بالعدد 1 ($u_n < 1$) فإنها متقاربة

■ (5) i

لدينا : $0 < u_n < 1$ إذن : $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) \leq 1$

و منه : $0 < \ell \leq 1$

المتتالية $(u_n)_n$ مكبورة و تزايدية إذن يستحيل أن تكون نهايتها الصفر

و هذا ما يبرر الكتابة $0 < \ell \leq 1$. و هذه النهاية يمكن أن تساوي

1 الذي ليس قيمة من قيمها لأنها تزايدية . و في هذه الحالة نقول بأن

العدد 1 محد علوي للمجموعة $\{u_n, n \geq 2\}$.

■ (5) ب

لدينا : $\begin{cases} 0 < u_n < 1 \\ 0 < (u_n)^2 < 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow 1 < e^{(u_n)^2} < e$$

نعلم أن : $f(u_n) = 1$

يعني : $4(u_n)^n e^{-(u_n)^2} = 1$

■ (2)

لدينا : $f'_n(x) = 4e^{-x^2} x^{n-1} (n - 2x^2)$

بما أن $4e^{-x^2} x^{n-1} > 0$ فإن إشارة $f'_n(x)$ تتعلق فقط بإشارة $n - 2x^2$

إذا كان : $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$ فإن $f'_n(x) = 0$.

إذا كان : $x > \sqrt{\frac{n}{2}}$ فإن $f'_n(x) < 0$.

إذا كان : $x < \sqrt{\frac{n}{2}}$ فإن $f'_n(x) > 0$.

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 4x^n e^{-x^2} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$

و نلخص النتائج في الجدول التالي :

x	0	$\sqrt{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
$f'_n(x)$		0	-
f_n	0	$f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)$	0

■ (3)

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f_n

f_n دالة متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$

لنبين أن $[0,1] \subset \left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$

ليكن x عنصراً من $[0,1]$ إذن $0 \leq x \leq 1$

و منه : $0 \leq x^2 \leq 1$

نعلم أن : $0 \leq 2 \leq n$

نضرب هاتين المتفاوتتين طرفاً بطرف نحصل على : $0 \leq 2x^2 \leq 1$

إذن : $0 \leq x \leq \sqrt{\frac{n}{2}}$ و منه نستنتج أن : $[0,1] \subset \left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$

بما أن f_n متصلة و تزايدية قطعاً على $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ و لدينا $[0,1] \subset \left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$

إذن : f_n متصلة و تزايدية قطعاً على $[0,1]$

و بالتالي : f_n تقابل من $[0,1]$ نحو صورته $\left[0, \frac{4}{e}\right]$

نضع : $g_n(x) = f_n(x) - 1$

لدينا : $g_n(0) \cdot g_n(1) = (f_n(0) - 1)(f_n(1) - 1)$

$$= (0 - 1)\left(\frac{4}{e} - 1\right)$$

$$\approx -0,47 < 0$$

$$\begin{aligned} &= -\int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt + \int_1^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt \\ &= -\varphi(x) + \varphi(2x) \end{aligned}$$

■ (2) ب

لدينا : $F(x) = -\varphi(x) + \varphi(2x)$

الدالة $x \rightarrow \varphi(x)$ قابلة للإشتقاق .

لأن $\frac{1}{\ln(1+x^2)}$ دالة متصلة إذن تقبل دالة أصلية و هي $\varphi(x)$

و لدينا : $\varphi'(x) = \frac{1}{\ln(1+x^2)}$

و لدينا كذلك : $x \rightarrow \varphi(2x)$ دالة قابلة للإشتقاق لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق

و بالتالي F قابلة للإشتقاق لأنها مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق.

إذن : $F'(x) = -\varphi'(x) + 2\varphi'(2x)$

$$\begin{aligned} &= \frac{-1}{\ln(1+x^2)} + \frac{2}{\ln(1+4x^2)} \\ &= \frac{2\ln(1+x^2) - \ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2) \cdot \ln(1+x^2)} \\ &= \frac{\ln[(1+x^2)^2] - \ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2) \cdot \ln(1+x^2)} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right)}{\ln(1+4x^2) \cdot \ln(1+x^2)} \end{aligned}$$

■ (2) ج

لدينا : $x > 0$

إذن : $1+x^2 > 1$ و $1+4x^2 > 1$

و منه : $\ln(1+4x^2) \cdot \ln(1+x^2) > 0$

و بالتالي إشارة $F'(x)$ تتعلق فقط بإشارة : $\ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right)$

لنحل المعادلة : $\ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right) = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow x^4+2x^2+1 = 1+4x^2 \\ &\Leftrightarrow x^4-2x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(x^2-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } x = \sqrt{2} \text{ أو } x = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

و منه : $e^{(u_n)^2} = 4(u_n)^n$

ننتقل من : $1 < e^{(u_n)^2} < e$

إذن : $1 < 4(u_n)^n < e$

نعلم أن الدالة $\ln$ تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}_+^*$ إذن :

$$0 < \ln(4(u_n)^n) < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < \ln(4) + n \ln(u_n) < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\ln 4}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}$$

■ (5) ج

بما أن :

$$\frac{-\ln 4}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}$$

$\swarrow +\infty$ $\searrow +\infty$
 0 0

إذن بالضرورة : $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(u_n) = 0$

و منه : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln(u_n)} = e^0 = 1$

و بالتالي : $\ell = 1$

التمرين الخامس : (3,75 ن)

■ (1)

لدينا : $F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

نضع : $y = -t$ إذن $dy = -dt$

إذا كان : $t = -x$ فإن $y = x$.

إذا كان : $t = -2x$ فإن $y = 2x$.

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_x^{2x} \frac{-1}{\ln(1+y^2)} dy \\ &= -\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+y^2)} dy \\ &= -F(x) \end{aligned}$$

إذن : F دالة فردية .

■ (2) ا

ليكن : $x > 0$

لدينا : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

$$= \int_x^1 \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt + \int_1^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$$

■ (3) ج

لدينا حسب السؤال (ب)

$$\frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(1+x^2)} = +\infty \quad \text{و لدينا :}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \right) \quad \text{يكفي أن نستعمل :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(1+4x^2)} = +\infty \quad \text{و لدينا كذلك :}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty \right) \quad \text{إن :}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \right) \quad \text{و بنفس الطريقة و باستعمال النهاية :}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0 \right) \quad \text{و} \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = +\infty \right) \quad \text{نجد :}$$

■ (3) د

$$F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)} \quad \text{لدينا حسب السؤال (ب)}$$

$$\sqrt{e-1} \approx 1,31 > 0 \quad \text{و لدينا :}$$

$$F(\sqrt{e-1}) < \frac{\sqrt{e-1}}{\ln(1+(e-1))} \quad \text{إن :}$$

$$(1) \quad F(\sqrt{e-1}) < \sqrt{e-1} \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{\sqrt{e-1}}{2} \approx 0,65 > 0 \quad \text{و} \quad \frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) \quad \text{و لدينا كذلك :}$$

$$F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \frac{\frac{\sqrt{e-1}}{2}}{\ln\left(1+\frac{4(e-1)}{4}\right)} \quad \text{إن :}$$

$$(2) \quad F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \frac{\sqrt{e-1}}{2} \quad \text{يعني :}$$

$$G(x) = F(x) - x \quad \text{نضع :}$$

$$(3) \quad G\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) \cdot G(\sqrt{e-1}) < 0 \quad \text{من (1) و (2) نستنتج :}$$

$$]0, \sqrt{2}] \quad \text{لدينا } F \text{ دالة متصلة و تناقصية قطعاً على}$$

$$(4) \quad]0, \sqrt{2}] \quad \text{إن } G \text{ دالة متصلة و تناقصية قطعاً على}$$

$$G'(x) = F'(x) - 1 < 0 \quad \text{لأن :}$$

من (3) و (4) نستنتج حسب مبرهنة القيم الوسيطة وجود حل وحيد للمعادلة $G(x) = 0$ أو المعادلة $F(x) = x$ في المجال $]0, \sqrt{2}]$.

نحن بصدد دراسة تغيرات الدالة F على المجال $]0, +\infty[$

إن سوف نهتم بالحالة $x = \sqrt{2}$ فقط.

$$x^2(x^2 - 2) > 0 \quad \text{فإن } x = \sqrt{2} \quad \text{إذا كان}$$

$$\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{1 + 4x^2} > 1 \quad \text{و منه :}$$

$$\ln\left(\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{1 + 4x^2}\right) > 0 \quad \text{يعني :}$$

$$F'(x) > 0 \quad \text{إن :}$$

يعني F تزايدية قطعاً على $[\sqrt{2}, +\infty[$:

في الحالة الأخرى نجد أن F تناقصية على المجال $]0, \sqrt{2}]$.

■ (3) أ

$$2x > 0 \quad \text{ليكن } x > 0 \quad \text{إن}$$

$$[x, 2x] \subset]0, +\infty[\quad \text{و منه :}$$

و بما أن φ قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$.

فإن φ متصلة و قابلة للإشتقاق على $]x, 2x[$

و منه حسب مبرهنة التزايديات المنتهية :

$$(\exists c \in]x, 2x[) : \frac{\varphi(2x) - \varphi(x)}{2x - x} = \varphi'(c)$$

$$(\exists c \in]x, 2x[) : \varphi(2x) - \varphi(x) = x\varphi'(c) \quad \text{يعني :}$$

$$F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)} \quad \text{يعني :}$$

■ (3) ب

$$0 < x < c < 2x \quad \text{لدينا حسب السؤال (أ)}$$

$$\Rightarrow 0 < x^2 < c^2 < 4x^2$$

$$\Rightarrow 0 < \ln(1+x^2) < \ln(1+c^2) < \ln(1+4x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln(1+4x^2)} < \frac{1}{\ln(1+c^2)} < \frac{1}{\ln(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\ln(1+4x^2)} < \frac{x}{\ln(1+c^2)} < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$$