



الصفحة
1
4



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2010
الموضوع

9	المعامل:	NS24	الرياضيات	المادة:
4	مدة الإنجاز:	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)		الشعب(ة) أو المسلك:

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنىات الجبرية.....(3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات.....(3ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(6.25ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(3,75ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3.5 نقط) الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما.

I- نزود المجموعة $]0, +\infty[$ بقانون التركيب الداخلي * المعروف بما يلي:

$$(\forall (a, b) \in I \times I) \quad a * b = e^{\ln(a) \cdot \ln(b)}$$

0.5 (1) بين أن القانون * تبادلي و تجميعي في I .

0.25 (2) بين أن القانون * يقبل عنصرا محايدا ε في I يتم تحديده.

0.75 (3) أ- بين أن $(I \setminus \{1\}, *)$ زمرة تبادلية. ($I \setminus \{1\}$ هي المجموعة I محرومة من 1)

0.25 ب- بين أن $]1, +\infty[$ زمرة جزئية للزمرة $(I \setminus \{1\}, *)$.

(4) نزود I بقانون التركيب الداخلي $\times$ ($\times$ هو الضرب في $\mathbb{R}$)

0.25 أ- بين أن القانون * توزيعي بالنسبة للقانون $\times$

0.5 ب- بين أن $(I, \times, *)$ جسم تبادلي.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{II- نعتبر المصفوفة :}$$

0.5 (1) أحسب A^2 و A^3 .

0.5 (2) استنتج أن المصفوفة A لا تقبل مقلوبا .

التمرين الثاني: (3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

0.25 (1) أ- حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $3 + 4i$

0.5 ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$: (E)

(2) ليكن a و b حلي المعادلة (E) حيث: $\text{Re}(a) < 0$ والنقطتين A و B صورتا a و b على التوالي.

0.25 أ- تحقق أن: $\frac{b}{a} = 1 - i$

0.75 ب- استنتج أن المثلث AOB متساوي الساقين و قائم الزاوية في A .

(3) لنكن C نقطة لحقها c وتخالف النقطة A ولنكن D صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه C

وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ولنكن L صورة النقطة D بالإزاحة التي متجهتها $\vec{AO}$.

0.5 أ- حدد بدلالة c العدد العقدي d لحق النقطة D .

0.5 ب- حدد بدلالة c العدد العقدي ℓ لحق النقطة L .

0.75 ج- حدد الكتابة الجبرية للعدد العقدي $\frac{\ell - c}{a - c}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ACL .

التمرين الثالث: (3 نقط)

- 1 (1) حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية m بحيث: $m^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$
- (2) ليكن p عددا أوليا بحيث: $p = 3 + 4k$ مع k عدد صحيح طبيعي.
- و ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث: $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$
- أ- تحقق أن: $(n^2)^{1+2k} \equiv -1 \pmod{p}$ 0.25
- ب- بين أن n و p أوليان فيما بينهما. 0.5
- ج- استنتج أن: $(n^2)^{1+2k} \equiv 1 \pmod{p}$ 0.75
- د- استنتج مما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n يحقق: $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ 0.5

التمرين الرابع: (6.25 نقط)

- I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بما يلي: $f(x) = 4xe^{-x^2}$
- و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- (1) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ 0.5
- (2) أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; +\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها. 0.75
- (3) حدد معادلة نصف المماس للمنحنى (C) في أصل المعلم ثم أنشئ (C) . 0.75
- (نأخذ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ و نقبل أن النقطة التي أفصولها $\sqrt{\frac{3}{2}}$ نقطة انعطاف للمنحنى $((C))$)
- (4) أحسب التكامل $a = \int_0^1 f(x)dx$ ثم استنتج بالسنتمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) ومحوري المعلم و المستقيم الذي معادلته $x = 1$ 0.5
- II- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2.
- نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بما يلي: $f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}$
- (1) أ- بين أن: $e^{-x^2} < e^{-x} \quad (\forall x > 1)$ 0.25
- ب- استنتج نهاية الدالة f_n عندما $x \rightarrow +\infty$ 0.25
- (2) ادرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0; +\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها. 0.75
- (3) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد u_n من المجال $[0, 1[$ بحيث: $f_n(u_n) = 1$ 0.5
- (4) أ- تحقق أن: $f_{n+1}(u_n) = u_n \quad (\forall n \geq 2)$ 0.25
- ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 2}$ تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. 0.75

(5) نضع : $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

أ- بين أن : $0 < \ell \leq 1$ 0.25

ب- بين أن : $(\forall n \geq 2) \quad -\frac{\ln(4)}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln(4)}{n}$ 0.25

ج- استنتج أن : $\ell = 1$ 0.5

التمرين الخامس: (3.75 نقط)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

(1) بين أن الدالة F فردية . 0.25

(2) لكل x من المجال $]0, +\infty[$ نضع : $\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

أ- تحقق أن : $(\forall x > 0) \quad F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$ 0.25

ب- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ ثم أحسب $F'(x)$ من أجل $x > 0$ 0.5

ج- استنتج منحي تغيرات الدالة F على المجال $]0, +\infty[$. 0.5

(3) أ- باستعمال مبرهنة التزايديات المنتهية ، بين أن : $F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$: $(\forall x > 0) (\exists c \in]x, 2x[)$ 0.5

ب- استنتج أن : $(\forall x > 0) \quad \frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$ 0.25

ج- حدد النهايات : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$. 0.75

د- تحقق أن : $F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \frac{\sqrt{e-1}}{2}$ و $F(\sqrt{e-1}) < \sqrt{e-1}$ 0.75

ثم استنتج أن المعادلة $F(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في $]0, +\infty[$.