

التمرين الأول : (4,5 ن)

■ (1) أ

لتكن $M(a, b)$ و $M(x, y)$ مصفوفتين من F

$$\begin{aligned} \text{لدينا :} \quad M(x, y) \times M(a, b) &= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa & xb + \frac{y}{a} \\ 0 & \frac{1}{xa} \end{pmatrix} \\ &= M\left(xa; xb + \frac{y}{a}\right) \end{aligned}$$

إن F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

■ (1) ب

لدينا F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

إن $\times$ قانون تركيب داخلي في F

لتكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ و $M(e, f)$ ثلاثة عناصر من F

لدينا :

$$\begin{aligned} (M(a, b) \times M(c, d)) \times M(e, f) &= M\left(ac, ad + \frac{b}{c}\right) \times M(e, f) \\ &= M\left(eac, acf + \frac{ad}{e} + \frac{b}{ce}\right) \end{aligned}$$

و لدينا كذلك :

$$\begin{aligned} M(a, b) \times (M(c, d) \times M(e, f)) &= M(a, b) \times M\left(ce, cf + \frac{d}{e}\right) \\ &= M\left(eac, acf + \frac{ad}{e} + \frac{b}{ce}\right) \end{aligned}$$

و بالتالي :

$$(M(a, b) \times M(c, d)) \times M(e, f) = M(a, b) \times (M(c, d) \times M(e, f))$$

يعني $\times$ قانون تجميعي في F .

ليكن $M(e_1; e_2)$ العنصر المحايد للضرب في F

$$\Leftrightarrow \forall M(a, b) \in F ; M(a, b) \times M(e_1; e_2) = M(e_1; e_2) \times M(a, b) = M(a, b)$$

$$\Leftrightarrow M\left(ae_1; ae_2 + \frac{b}{e_1}\right) = M(a, b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ae_1 = a \\ ae_2 + \frac{b}{e_1} = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 1 \in \mathbb{R}^* \\ e_2 = 0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

إن $M(1, 0) = I$ هو العنصر المحايد لضرب المصفوفات في F .

لتكن المصفوفة $M(x', y')$ ماثلة المصفوفة $M(x, y)$ بالنسبة لـ $\times$ في F .

$$\Leftrightarrow M(x, y) \times M(x', y') = M(x', y') \times M(x, y) = I$$

$$\Leftrightarrow M\left(xx', xy' + \frac{y}{x'}\right) = M(1, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^* \\ y' = -y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

إن كل مصفوفة $M(x, y)$ تمتلك مصفوفة ماثلة $M\left(\frac{1}{x}; -y\right)$ بالنسبة

للضرب في F .

لدينا $\times$ ليس تبادلياً لأن :

$$\begin{cases} M(x, y) \times M(y, x) = M(xy, x^2 + 1) \\ M(y, x) \times M(x, y) = M(xy, y^2 + 1) \end{cases} \text{ و}$$

نلاحظ إن أن : $x^2 + 1 \neq y^2 + 1$; $(\forall x \neq y)$

خلاصة : $(F, \times)$ زمرة غير تبادلية.

■ (2)

لدينا G جزء غير فارغ من F لأنها تضم العنصر $M(1, 0)$ على الأقل

لتكن $M(a, 0)$ و $M(b, 0)$ مصفوفتين من G

$$\begin{aligned} \text{لدينا :} \quad M(b, 0) \times \left(M(a, 0)\right)' &= M(b, 0) \times M\left(\frac{1}{a}, 0\right) \\ &= M\left(\frac{b}{a}; 0\right) \end{aligned}$$

لدينا $a \neq 0$ إذن $\frac{b}{a} \neq 0$ و منه : $M\left(\frac{b}{a}, 0\right) \in G$

و بالتالي : $(G, \times)$ زمرة جزئية للزمرة $(F, \times)$.

■ (3) أ

$$(1, 1) \perp (2, 3) = \left(2; 3 + \frac{1}{2}\right) = \left(2; \frac{7}{2}\right)$$

$$(2, 3) \perp (1, 1) = \left(2; 2 + \frac{3}{1}\right) = (2, 5)$$

■ (3) ب

لتكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ مصفوفتين من F

$$\begin{aligned} \text{لدينا :} \quad \varphi(M(c, d) \times M(a, b)) &= \varphi\left(M\left(ac; bc + \frac{d}{a}\right)\right) \\ &= \left(ac; bc + \frac{d}{a}\right) \\ &= (c, d) \perp (a, b) \\ &= \varphi(M(c, d)) \perp \varphi(M(a, b)) \end{aligned}$$

إن φ تشاكل من $(F, \times)$ نحو $(E, \perp)$.

ليكن (a, b) عنصراً من E .

نريد حل المعادلة ذات المجهول $M(x, y)$ التالية : $\varphi(M(x, y)) = (a, b)$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (a, b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \sqrt[4]{2} \left(\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}+4}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}} \right) \\ m_2 = \sqrt[4]{2} \left(-\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}+4}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}} \right) \end{cases}$$

■ (I) ②

في هذا السؤال يجب ضبط جميع قواعد الصيغ المتثلثة .

$$z_1 = r e^{i\varphi} \quad \text{نضع :}$$

$$z_1 = 1 - im \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned} &= 1 - i e^{i\theta} \\ &= 1 - i(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (1 + \sin \theta) - i \cos \theta \end{aligned}$$

إن هدفنا هو إيجاد المجهولين r و φ بدلالة θ بحيث :

$$(1 + \sin \theta) - i \cos \theta = r \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r \cos \varphi = 1 + \sin \theta \\ r \sin \varphi = -\cos \theta \end{cases}$$

$$(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = r^2 \quad \text{لدينا :}$$

$$(1 + \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta = r^2 \quad \text{إن :}$$

$$r^2 = 2(1 + \sin \theta) = 2 \left(\sin \frac{\pi}{2} + \sin \theta \right) \quad \text{و منه :}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right) \\ &= 4 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \\ &= 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

$$r = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{إن :}$$

نعوض r بقيمته في المعادلة الثانية من النظام نحصل على :

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{-\cos \theta}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} \\ &= \frac{\cos(\pi - \theta)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} \\ &= \frac{\sin \left(\frac{-\pi}{2} + \theta \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} \\ &= \frac{-\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

إن المعادلة تقبل حلا وحيدا و هو $M(x, y)$

و منه : $\forall (a, b) \in E, \exists ! M(x, y) \in F ; \varphi(M(x, y)) = (a, b)$

و بالتالي : φ تقابل من $(F, \times)$ نحو $(E, \perp)$

خلاصة : φ تشاكل تقابلي من $(F, \times)$ نحو $(E, \perp)$.

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

بما أن : $(F, \times)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد هو المصفوفة $M(1, 0)$

و كل مصفوفة $M(x, y)$ تقبل مماثلة $M\left(\frac{1}{x}, -y\right)$ بالنسبة لـ $\times$ في F .

فإن : $(E, \perp)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد هو الزوج $\varphi(M(1, 0))$

و كل زوج (x, y) يقبل مماثلا $\varphi\left(M\left(\frac{1}{x}, -y\right)\right)$.

$$\begin{cases} \varphi(M(1, 0)) = (1, 0) \\ \varphi\left(M\left(\frac{1}{x}, -y\right)\right) = \left(\frac{1}{x}, -y\right) \end{cases} \quad \text{و لدينا :}$$

التمرين الثاني : (4,0 ن)

■ (I) ① ①

$$\begin{aligned} \Delta &= (1 - i)^2(m + 1)^2 + 4i(m^2 + 1) \\ &= -2i(m^2 + 2m + 1) + 4im^2 + 4i \\ &= 2im^2 - 4im + 2i \\ &= 2i(m^2 - 2m + 1) \\ &= (1 + i)^2(m - 1)^2 \end{aligned}$$

■ (I) ① ①

$$z_1 = (1 - im) \quad \text{و} \quad z_2 = (m - i)$$

■ (I) ① ①

نضع : $m = r e^{i\theta}$ و ننتقل من : $z_1 z_2 = 1$

$$\Leftrightarrow (1 - im)(m - i) = 1$$

$$\Leftrightarrow m - i - m^2 i - m = 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 = -1 + i$$

$$\Leftrightarrow r^2 e^{2i\theta} = \sqrt{2} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)$$

$$\Leftrightarrow r^2 e^{2i\theta} = \sqrt{2} e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{8} + k\pi ; k \in \{0, 1\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{8} \quad \text{أو} \quad \theta = \frac{11\pi}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{3i\pi}{8}} \\ m_2 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{11i\pi}{8}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \cos \varphi &= \frac{-\cos(\pi - \theta)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} \\ \Leftrightarrow \cos \varphi &= \frac{-\sin\left(\frac{-\pi}{2} + \theta\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} \\ \Leftrightarrow \cos \varphi &= \frac{-2 \sin\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} \\ \Leftrightarrow \cos \varphi &= \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} \\ \Leftrightarrow \cos \varphi &= \cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\varphi \equiv \left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) [k\pi] \quad \text{إذن :}$$

$$z_2 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{و بالتالي :}$$

■ (II) ①

$$\begin{aligned} M \in (M_1 M_2) \quad \Leftrightarrow \quad & M_2 \text{ و } M_1 \text{ و } M \text{ نقط مستقيمة .} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{z_1 - m}{z_2 - m} \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1 - im - m}{m - i - m} \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad & i + m - im \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{نضع : } m = x + iy$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x + y) + i(y - x + 1) &\in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow y - x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= x - 1 \end{aligned}$$

إذن مجموعة النقط M تشكل مستقيما معادلته $y = x - 1$.

■ (II) ② (i)

$$\text{ننتقل من } z' = 1 - iz$$

نريد كتابة هذه المتساوية على شكل :

$$z' = e^{i\theta} (z - \omega) + \omega \quad \text{بحيث } \omega \text{ عدد عقدي .}$$

$$\begin{cases} e^{i\theta} = -i \\ -\omega e^{i\theta} + \omega = 1 \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{-2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\varphi \equiv \left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) [k\pi] \quad \text{إذن :}$$

$$z_1 = \left(2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right) e^{i\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{و بالتالي :}$$

$$z_2 = r e^{i\varphi} \quad \text{بنفس الطريقة نضع :}$$

$$z_2 = m - i = e^{i\theta} - i = \cos \theta + i(\sin \theta - 1)$$

هدفنا هو البحث عن r و φ بدلالة θ بحيث :

$$r \cos \varphi + i r \sin \varphi = \cos \theta + i(\sin \theta - 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = r \cos \varphi \\ \sin \theta - 1 = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = r^2 \quad \text{لدينا :}$$

$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta - 1)^2 = r^2 \quad \text{إذن :}$$

$$r^2 = 2(1 - \sin \theta) \quad \text{و منه :}$$

$$r^2 = 2(1 + \sin(-\theta)) \quad \text{أي :}$$

نعلم حسب الجزء الأول من هذا السؤال أن :

$$2(1 + \sin \theta) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$2(1 + \sin(-\theta)) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{إذن :}$$

$$r^2 = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{يعني :}$$

$$r = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{و منه :}$$

ملاحظة : لقد تم اختيار القيمة الموجبة لـ r لأن معيار عدد عقدي

يكون دائما عددا موجبا.

نعوض r بقيمته في المعادلة الأولى من النظام نحصل على :

$$\cos \varphi = \frac{\cos \theta}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

من (3) و (2) نحصل على : $(4) \quad 3^n(1+2^n) \equiv 1[2]$

و من (1) و (4) نحصل على : $(2^n - 1) + 3^n(1+2^n) \equiv 2[2]$

يعني : $2^n(1+2^n) \equiv 0[2]$ لأن : $2 \equiv 0[2]$

و منه : $a_n \equiv 0[2]$

و بالتالي : a_n عدد زوجي كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي n .

■ (1) ب

لدينا : $a_n = 2^n + 3^n + 3^n 2^n - 1$

يعني : $a_n = 2^n(3^n + 1) + (3^n - 1)$

نعلم أن : $3 \equiv 0[3]$ إذن : $3^n \equiv 0[3]$

و منه : $(6) \quad (3^n + 1) \equiv 1[3]$ و $(5) \quad (3^n - 1) \equiv -1[3]$

من (5) و (6) نحصل على : $2^n(3^n + 1) + (3^n - 1) \equiv 2^n - 1[3]$

يعني : $(7) \quad a_n \equiv (2^n - 1)[3]$

و لدينا في الأخير : $2 \equiv -1[3]$ إذن : $2^n \equiv (-1)^n[3]$

أي : $(8) \quad (2^n - 1) \equiv ((-1)^n - 1)[3]$

من المتوافقتين (7) و (8) نستنتج أن : $a_n \equiv (-1)^n - 1[3]$

من أجل n عدد زوجي نحصل على : $(-1)^{2k} - 1 = 0$

أي : $a_n \equiv 0[3]$

من أجل : n عدد فردي نحصل على : $(-1)^{2k+1} - 1 = -2$

و منه : $a_n \equiv -2[3]$

■ (2) ا

بتطبيق مبرهنة (Fermat) مرتين نحصل على :

$$\begin{cases} p \text{ أولي} \\ p \wedge 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2^{p-1} \equiv 1[p] \quad (1)$$

و

$$\begin{cases} p \text{ أولي} \\ p \wedge 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow 3^{p-1} \equiv 1[p] \quad (2)$$

نضرب المتوافقتين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على :

$$3^{p-1} \cdot 2^{p-1} \equiv 1[p]$$

يعني : $6^{p-1} \equiv 1[p]$

$$\begin{cases} \theta = \frac{-\pi}{2} \\ \omega = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

$$z' = e^{\frac{-\pi i}{2}} \left(z - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right)$$

إذن التحويل R عبارة عن دوران مركزه النقطة $\Omega \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right)$ و زاويته $\frac{-\pi}{2}$

■ (II) 2 ب

نضع : $m = x + iy$ و $\Re(m) = x$ و $\Im(m) = y$

$$\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \Leftrightarrow \frac{\overline{z_2 - z_1}}{\overline{z_2 - m}} = - \frac{(z_2 - z_1)}{(z_2 - m)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{m} + i - 1 - i\bar{m}}{i} = \frac{m - i - 1 + im}{i}$$

$$\Leftrightarrow (x - iy) + i - 1 - i(x - iy) = (x + iy) - i - 1 + i(x + iy)$$

$$\Leftrightarrow -2ix + 2i - 2iy = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y = 1$$

$$\Leftrightarrow \Re(m) + \Im(m) + 1$$

■ (II) 2 ج

ننطلق من كون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة

$$\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \right) \equiv \arg \left(\frac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega} \right) [\pi]$$

$$\left(\frac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega} \right) = \frac{-i \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} - m \right)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} - m \right)} = -i$$

و لدينا : $\frac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega}$ عدد تخيلي صرف.

و منه : $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ عدد تخيلي صرف كذلك.

$$\Leftrightarrow \Re(m) + \Im(m) = 1$$

$$\Leftrightarrow y = -x + 1$$

إذن مجموعة النقط M التي من أجلها Ω و M و M_1 و M_2 متداورة

تُشكّل المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = -x + 1$ (Δ)

التمرين الثالث : (3,3 ن)

■ (1) ا

لدينا : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

$$| = (2^n - 1) + 3^n(1 + 2^n)$$

لدينا : $2 \equiv 0[2]$ و $3 \equiv 1[2]$

إذن : $2^n \equiv 0[2]$ و $3^n \equiv 1[2]$

و منه : $(3) \quad 3^n \equiv 1[2]$ و $(1) \quad \begin{cases} 2^n - 1 \equiv 1[2] \\ 2^n + 1 \equiv 1[2] \end{cases}$

التمرين الرابع : (3,3 ن) الجزء الأول

■ ① ①

نضع : $x = t^n$ إذن : $\ln x = n \ln t$

و منه : $t = e^{\left(\frac{\ln x}{n}\right)}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \ln x)^n \quad \text{لدينا} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t^n (1 - n \ln t)^n \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\underbrace{t}_{\rightarrow 0} - \underbrace{nt \ln t}_{\rightarrow 0} \right)^n = 0 = f_n(0) \end{aligned}$$

إذن دالة متصلة على يمين الصفر.

■ ① ②

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln x)^n = +\infty \notin \mathbb{R}$$

إذن f_n غير قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر.

■ ① ③

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f_2(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f_1(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty$$

■ ② ①

لدينا : $f_1(x) = x(1 - \ln x)$

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= (x - x \ln x)' \quad \text{إذن} \\ &= 1 - (\ln x + 1) \\ &= -\ln x \end{aligned}$$

و منه : f_1' تتعدم في العدد 1

إذا كان : $x > 1$ فإن : $f_1'(x) < 0$

إذا كان : $x < 1$ فإن : $f_1'(x) > 0$

■ (II) ② ب

لدينا : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ إذن : $3 \cdot 2^{p-1} \equiv 3[p]$ (1)

و لدينا : $3^{p-1} \equiv 1[p]$ إذن : $2 \cdot 3^{p-1} \equiv 2[p]$ (2)

و لدينا : $6^{p-1} \equiv 1[p]$ إذن : $6 \cdot 6^{p-2} \equiv 1[p]$ (3)

و لدينا : $-6 \equiv -6[p]$ (4)

نجمع المتوافقات (1) و (2) و (3) و (4) طرفا بطرف نحصل على :

$$3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6 \cdot 6^{p-2} - 6 \equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot 2^{p-2} + 6 \cdot 3^{p-2} + 6 \cdot 6^{p-2} - 6 \equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow 6(2^{p-1} + 3^{p-1} + 6^{p-2} - 1) \equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow 6(a_{p-2}) \equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow p / 6(a_{p-2}) \quad (5)$$

نُفكك العدد 6 إلى جداء عوامل أولية نجد : $6 = 2^1 \times 3^1$

و لدينا p عدد أولي أكبر من 3 إذن : $6 \wedge p = 1$ (6)

من (5) و (6) نستنتج حسب (Gauss) : p / a_{p-2}

■ (II) ② ج

ليكن q عددا أوليا .

نفصل في هذا السؤال بين ثلاث حالات للعدد q :

الحالة الأولى : إذا كان $q = 2$

فإنه حسب نتيجة السؤال ① ① : $2 / a_n$: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

إذن : $(\exists n \in \mathbb{N}^*) : a_n \wedge q = q$

الحالة الثانية : إذا كان $q = 3$

فإنه حسب نتيجة السؤال ① ② : $3 / a_n$: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

إذن : $(\exists n \in \mathbb{N}^*) : a_n \wedge q = q$

الحالة الثالثة : إذا كان $q > 3$

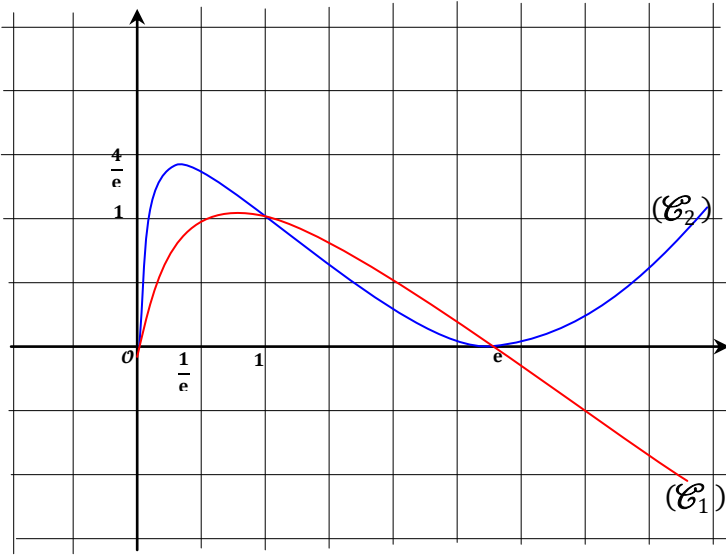
رأينا في السؤال ② ② أن : q / a_{q-2} ; $(\forall q > 3)$

إذن : $(\exists n \in \mathbb{N}^*) : a_n \wedge q = q$

خلاصة : نستنتج من هذه الحالات الثلاث أن :

$$(\forall q \in \mathbb{P}), (\exists n \in \mathbb{N}^*) : a_n \wedge q = q$$

■ 3 ب



الجزء الثاني

■ 1 ا

لدينا الدالة $x \rightarrow \frac{f_1(x)}{1+x^2}$ متصلة على $]0, +\infty[$

إذن فهي تقبل دالة أصلية ψ بحيث :

$$F(x) = \psi(1) - \psi(e^x) \quad \text{و} \quad \psi'(x) = \frac{f_1(x)}{(1+x^2)}$$

إذن F قابلة للإشتقاق على $] -\infty; 0[$.

$$\begin{aligned} \text{و لدينا : } F'(x) &= (\psi(1))' - (\psi(e^x))' \\ &= 0 - e^x \psi'(e^x) \\ &= \frac{-e^x f_1(e^x)}{1 + e^{2x}} \\ &= \frac{(x-1)e^{2x}}{1 + e^{2x}} \end{aligned}$$

■ 1 ب

لدينا : $(\forall x < 0) ; F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1 + e^{2x}}$

و بما أن : $(\forall x < 0) ; \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} > 0$

فإن إشارة $F'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(x-1)$

ولدينا : $x < 1 \iff x < 0$

و منه : $x - 1 < 0$

وبالتالي : $F'(x) < 0$ يعني F دالة تناقصية على المجال $] -\infty; 0[$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f_1 كما يلي :

x	0	1	e	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	0	-	-
f_1	0	1	0	$-\infty$

■ 2 ب

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= (x(1 - \ln x)^2)' \\ &= (1 - \ln x)^2 - \frac{2x}{x}(1 - \ln x) \\ &= (1 - \ln x)^2 - 2(1 - \ln x) \\ &= (1 - \ln x)(1 - \ln x - 2) \\ &= (1 - \ln x)(-1 - \ln x) \end{aligned}$$

نلاحظ أن f_2' تنعدم في $\frac{1}{e}$ و e .

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
$1 - \ln x$	+	+	0	-
$-1 - \ln x$	+	0	-	-
$f_2'(x)$	+	0	0	+
f_2	0	$\frac{4}{e}$	0	$+\infty$

■ 3 ا

لدينا : $f_1(x) - f_2(x)$

$$\begin{aligned} &= x(1 - \ln x) - x(1 - \ln x)^2 \\ &= x(1 - \ln x)(\ln x) \end{aligned}$$

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+	+
$(1 - \ln x)$	+	+	0	-
$x(1 - \ln x) \ln x$	-	0	+	-

إذن $(\mathcal{E}_1)$ يوجد فوق $(\mathcal{E}_2)$ على المجال $[1; e]$.

و $(\mathcal{E}_1)$ يوجد أسفل $(\mathcal{E}_2)$ على المجالين $]0; 1[$ و $[e; +\infty[$

الجزء الثالث

■ (1) أ

ليكن $1 \leq x \leq e$ و $n \geq 1$

إذن : $0 \leq \ln x \leq 1$ و منه : $(1 - \ln x) \geq 0$

أي : $x(1 - \ln x)^n \geq 0$ و بالتالي : $\int_1^e f_n(x) dx \geq 0$

أي : $u_n \geq 0$

■ (1) ب

لدينا : $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

$$= x(1 - \ln x)^{n+1} - x(1 - \ln x)^n$$

$$= x(1 - \ln x)^n (-\ln x)$$

و بما أن : $1 \leq x \leq e$ فإن : $(1 - \ln x) \geq 0$ و $-\ln x \leq 0$

و منه : $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$ أي : $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

■ (1) ج

بما أن : $\forall x \in [1, e] ; f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

فإن : $\int_1^e f_{n+1}(x) dx \leq \int_1^e f_n(x) dx$

و منه : $u_{n+1} \leq u_n$

■ (1) د

لدينا : $u_{n+1} \leq u_n$ إذن : $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية تناقصية .

و لدينا : $u_n \geq 0$; $(\forall n \geq 1)$ إذن : $(u_n)_{n \geq 1}$ مصغورة بـ 0

و بالتالي : $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية متقاربة .

■ (2) أ

لدينا : $u_{n+1} = \int_1^e f_{n+1}(x) dx = \int_1^e \underbrace{x}_{u'} \underbrace{(1 - \ln x)^{n+1}}_v dx$

$$= \left[\frac{x^2}{2} (1 - \ln x)^{n+1} \right]_1^e - \frac{(n+1)}{2} \int_1^e x^2 \left(\frac{-1}{x} \right) (1 - \ln x)^n dx$$

$$= \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} \int_1^e x(1 - \ln x)^n dx$$

$$= \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n$$

و بالتالي : $(\forall n \geq 1) ; u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n$

■ (2) أ

ليكن $t \in [e^x; 1]$ بحيث : $x < 0$

يعني : $e^x < t < 1$

و منه : $1 + e^{2x} < 1 + t^2 < 2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{1+t^2} < \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} f_1(t) < \frac{f_1(t)}{1+t^2} < \frac{f_1(t)}{1+e^{2x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt < \int_{e^x}^1 \left(\frac{f_1(t)}{1+t^2} \right) dt < \int_{e^x}^1 \left(\frac{f_1(t)}{1+e^{2x}} \right) dt$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt < F(x) < \frac{1}{(1+e^{2x})} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \right) (*)$$

■ (2) ب

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } \left(x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right) \right)' &= 2x \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right) + x^2 \left(\frac{-1}{2x} \right) \\ &= \frac{3x}{2} - x \ln x - \frac{x}{2} \\ &= x(1 - \ln x)^1 \\ &= f_1(x) \end{aligned}$$

إذن الدالة $x \rightarrow x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right)$ دالة أصلية للدالة f_1 على $]0; +\infty[$.

■ (2) ج

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } \int_{e^x}^1 f_1(t) dt &= \left[x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right) \right]_{e^x}^1 \\ &= \frac{3}{4} - e^{2x} \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3e^{2x}}{4} + \frac{xe^{2x}}{2} \end{aligned}$$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x} = 0^- = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0^+ = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{4} - \frac{3e^{2x}}{4} + \frac{xe^{2x}}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

■ (3)

نعود إلى التأيير (*).

لدينا : $\frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt < F(x) < \frac{1}{(1+e^{2x})} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \right) < \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) < \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{(1+e^{2x})} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8} < l < \frac{3}{4}$$

■ (2) بـ

الحيز $\mathcal{S}$ الذي طلب منا حساب مساحته مُعرّف بما يلي :

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \left| \int_1^e (f_2(x) - f_1(x)) dx \right| \\ &= \left| \int_1^e f_2(x) dx - \int_1^e f_1(x) dx \right| \\ &= |u_1 - u_2|\end{aligned}$$

$$u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n \quad \text{و لدينا :}$$

$$u_0 = \int_1^e x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$u_1 = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4}$$

$$u_2 = \frac{-1}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4}$$

و بالتالي :

$$\mathcal{S} = |u_1 - u_2| = \left(\frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} \right) - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4} \right) = \frac{1}{2} (\text{unité})^2$$

unité هي وحدة المعلم و بما أن : $\| \vec{t} \| = \| \vec{j} \| = 2 \text{ cm}$

فإن : $\text{unité} = 2 \text{ cm}$

و منه : $(\text{unité})^2 = 4 \text{ cm}^2$

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} (\text{unité})^2 = \boxed{2 \text{ cm}^2} \quad \text{و بالتالي :}$$

■ (3) جـ

لدينا حسب ما سبق : $0 \leq u_{n+1}$

$$0 \leq \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{(n+1)}{2} u_n \quad \text{و منه :}$$

$$(1) \quad \frac{1}{(n+1)} \leq u_n \quad \text{أي :}$$

و لدينا كذلك : $u_{n+1} \leq u_n$

$$\frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n \leq u_n \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2} + \frac{nu_n}{2} + \frac{u_n}{2} \leq u_n$$

$$\Leftrightarrow u_n \left(\frac{n+1-2}{2} \right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow u_n \left(\frac{n-1}{2} \right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \geq 2) \quad u_n \leq \frac{1}{n-1} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$(3) \quad (\forall n \geq 2) ; \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

■ (3) بـ

لدينا حسب التأطير (3) :

$$(\forall n \geq 2) ; \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \geq 2) ; \frac{n}{n+1} \leq nu_n \leq \frac{n}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \geq 2) ; \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \leq nu_n \leq \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n-1} \right) = 0 \quad \text{لدينا :}$$

إذن حسب التأطير (3) نستنتج : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n-\frac{1}{n}} \right) = 1 \quad \text{و لدينا :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 1 \quad \text{إذن حسب التأطير (4) :}$$

■ (4) جـ

ليكن $n \geq 1$

في البداية لدينا : $d_n = |v_n - u_n|$

$$\begin{aligned}&= \left| \frac{-1}{2} + \frac{n}{2} v_{n-1} + \frac{1}{2} - \frac{n}{2} u_{n-1} \right| \\ &= \frac{n}{2} |v_{n-1} + u_{n-1}|\end{aligned}$$

$$|v_n - u_n| = \frac{n}{2} |v_{n-1} - u_{n-1}| \quad \text{إذن :}$$

$$= \left(\frac{n}{2} \right) \left(\frac{n-1}{2} \right) |v_{n-2} - u_{n-2}|$$

$$= \left(\frac{n}{2} \right) \left(\frac{n-1}{2} \right) \left(\frac{n-2}{2} \right) |v_{n-3} - u_{n-3}|$$

$\vdots \quad \quad \quad \vdots$

$$= \left(\frac{n}{2} \right) \left(\frac{n-1}{2} \right) \left(\frac{n-2}{2} \right) \cdots \left(\frac{2}{2} \right) |v_1 - u_1|$$

$$(\forall n \geq 1) ; d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1 \quad \text{و بالتالي :}$$

■ (4) بـ

$$(\forall n \geq 2) ; \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2} \quad \text{لنبرهن على أن :}$$

$$\frac{2!}{2} \geq 3^0 : n = 2 \quad \text{بالترجع لدينا من أجل}$$

$$(\forall n \geq 2) ; \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2} \quad \text{نفترض أن :}$$

$$\frac{(n+1)!}{2} = (n+1) \frac{n!}{2} \geq (n+1) 3^{n-2} \quad \text{لدينا :}$$

$$(n+1) \geq 3 \quad \text{فإن : } n \geq 2$$

$$(n+1) 3^{n-2} \geq 3^{n-1} \quad \text{يعني : } (n+1) 3^{n-2} \geq 3 \cdot 3^{n-2}$$

$$\frac{(n+1)!}{2} \geq 3^{(n+1)-2} \quad \text{إذن :}$$

$$(\forall n \geq 2) ; \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2} \quad \text{و بالتالي :}$$

■ 4 ج

$$\text{ننتقل من العلاقة : } (\forall n \geq 2) ; \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow n! \geq 3^{n-2} \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow n! \geq \frac{3^{n-2} \cdot 2^{n-1}}{2^{n-2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2^{n-2}} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow d_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} d_1$$

بما أن : $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$ متتالية هندسية أساسها العدد الموجب $\frac{3}{2}$ و الأكبر من 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} = +\infty \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = +\infty \quad \text{و منه :}$$

■ 4 د

$$d_n = |v_n - u_n| \quad \text{لدينا :}$$

نفترض أن $(v_n)_{n \geq 1}$ متتالية متقاربة .

و نعلم أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 2}$ متقاربة .

إذن : $(d_n)_{n \geq 2}$ متقاربة

$$d_n \rightarrow +\infty \quad \text{لكن حسب السؤال 4 ج :}$$

و بالتالي من هذا التناقض نستنتج أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ متباعدة.

■ و الحمد لله رب العالمين ■