

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 9
مدة الانجاز : أربع ساعات



الامتحانات الوطنية الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2009

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2.

نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

لتكن $\mathcal{F}$ مجموعة المصفوفات (x, y) من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بحيث $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$ مع $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

① أ 0,25 ن بين أن $\mathcal{F}$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

ب 0,50 ن بين أن $(\mathcal{F}, \times)$ زمرة غير تبادلية.

② 1,00 ن لتكن G مجموعة المصفوفات $M(x, 0)$ من $\mathcal{F}$ حيث $x \in \mathbb{R}^*$

بين أن G زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{F}, \times)$.

③ 0,50 ن ليكن $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

نزود المجموعة E بقانون التركيب الداخلي $\perp$ المعروف بما يلي :

$$(\forall (x, y) \in E) ; (\forall (a, b) \in E) : (x, y) \perp (a, b) = \left(ax, bx + \frac{y}{a} \right)$$

نعتبر التطبيق : $\varphi : (\mathcal{F}, \times) \rightarrow (E, \perp)$

$$M(x, y) \rightarrow \varphi(M(x, y)) = (x, y)$$

أ 0,25 ن أحسب : $(1, 1) \perp (2, 3)$ و $(2, 3) \perp (1, 1)$.

ب 0,50 ن بين أن φ تشاكل تقابلي.

ج 0,50 ن استنتج بنية $(E, \perp)$.

التمرين الثاني : (4,0 ن)

m عدد عقدي يخالف 1.

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - (1 - i)(m + 1)z - i(m^2 + 1) = 0$ (E)

أ 0,25 ن ① تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta = [(1 + i)(m - 1)]^2$.

ب 0,25 ن ② حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

ج) حدد على الشكل الجبري قيمتي العدد العقدي m لكي يكون جداء حلي المعادلة (E) يساوي 1	0,50 ن
② نضع $z_1 = 1 - im$ و $z_2 = m - i$.	1,00 ن
(II) في حالة $m = e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ، أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .	
المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.	
نعتبر النقط M و M_1 و M_2 التي ألقاها على التوالي هي : m و $z_1 = 1 - im$ و $z_2 = m - i$.	
① حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط M و M_1 و M_2 نقط مستقيمة.	0,50 ن
② ① بين أن التحويل $\mathcal{R}$ الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' التي لحقها $z' = 1 - iz$ هو دوران ينبغي تحديد لحق مركزه Ω و قياسا لزاويته.	0,50 ن
ب) بين أن العدد العقدي : $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان : $\Re(m) + \Im(m) = 1$	0,50 ن
($\Re(m)$ هو الجزء الحقيقي للعدد m و $\Im(m)$ هو جزءه التخيلي)	
ج) استنتج مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة .	0,50 ن
التمرين الثالث : (3,0 ن)	
لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.	
① ① ا) تحقق أن a_n عدد زوجي لكل n من $\mathbb{N}^*$.	0,25 ن
ب) حدد قيم n التي يكون من أجلها $a_n \equiv 0[3]$.	0,50 ن
② ليكن p عددا أوليا بحيث $p > 3$.	
① بين أن : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و $3^{p-1} \equiv 1[p]$ و $6^{p-1} \equiv 1[p]$.	0,75 ن
ب) بين أن p يقسم a_{p-2} .	0,75 ن
ج) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي أولي q يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم n بحيث $a_n \wedge q = q$.	0,50 ن
($a_n \wedge q$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و q)	
التمرين الرابع : (10 ن)	
n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .	
نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي .	
$f_n(0) = 0$ و $f_n(x) = x(1 - \ln x)^n$; $(\forall x > 0)$	
(I) ليكن $(\mathcal{E}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.	
① ① ا) بين أن الدالة f_n متصلة على اليمين في 0 (يمكن وضع $x = t^n$) .	0,50 ن
ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في 0 .	0,25 ن
ج) حدد النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$	1,00 ن

② أ) أدرس تغيرات الدالة f_1 .	0,50 ن
ب) أدرس تغيرات الدالة f_2 .	0,50 ن
③ أ) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$.	0,25 ن
ب) أنشئ المنحنيين $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$ (نقبل $A(1,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathcal{C}_2)$) (نأخذ : $\ \vec{i}\ = \ \vec{j}\ = 2cm$)	0,50 ن
(II) نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty, 0]$ بما يلي : $F(x) = \int_{e^x}^1 \frac{f_1(t)}{1+t^2} dt$	
① أ) بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty, 0[$. وأن : $F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{(1+e^{2x})}$; $(\forall x < 0)$	0,50 ن
ب) استنتج منحنى تغيرات الدالة F على المجال : $]-\infty, 0]$	0,25 ن
② أ) بين أن : $\frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$; $(\forall x < 0)$	0,25 ن
ب) تحقق أن الدالة : $x \rightarrow x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right)$ هي دالة أصلية للدالة f_1 على المجال $]0, +\infty[$.	0,25 ن
ج) بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \frac{3}{4}$	0,25 ن
③ نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ عندما يؤول x إلى $-\infty$. بين أن : $\frac{3}{8} \leq \ell \leq \frac{3}{4}$	0,25 ن
(III) لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = \int_1^e f_n(x) dx$	
① أ) بين أن : $u_n \geq 0$; $(\forall n \geq 1)$.	0,50 ن
ب) حدد إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[1, e]$.	0,50 ن
ج) بين أن : $u_{n+1} \leq u_n$; $(\forall n \geq 1)$.	0,25 ن
د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة .	0,25 ن
② أ) بين أن : $u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n$; $(\forall n \geq 1)$	0,50 ن
ب) استنتج بـ cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$ والمستقيمين $x=1$ و $x=e$.	0,50 ن
③ أ) بين أن : $\frac{1}{(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{(n-1)}$; $(\forall n \geq 2)$	0,75 ن
ب) حدد : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} nu_n$	0,50 ن
④ a عدد حقيقي مخالف للعدد u_1 . نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي : $v_1 = a$ و $v_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} v_n$; $(\forall n \geq 1)$ و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $d_n = v_n - u_n $.	
أ) بين أن : $d_n = \frac{n!}{2^{(n-1)}} d_1$; $(\forall n \geq 1)$	0,25 ن
ب) بين أن : $\frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$; $(\forall n \geq 2)$	0,25 ن
ج) بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty$	0,25 ن
د) استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ متباعدة .	0,25 ن