

ننطلق من الكتابة : $r(M) = M_1$

$$\Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$\Leftrightarrow z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i - \frac{1}{2}i\right)$$

$$\Leftrightarrow z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z + i - \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$\Leftrightarrow z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z + e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}z - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) + e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}z - e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}}\right) + e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow (z_1 - e^{i\frac{\pi}{2}}) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - e^{i\frac{\pi}{2}})$$

$$\Leftrightarrow (z_1 - i) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{VM_1} = e^{i\frac{\pi}{3}} \overrightarrow{VM}$$

و بالتالي : r دوران مركزه $V(i)$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

و لدينا كذلك : $h(M) = M_2$

$$\Leftrightarrow z_2 = -2z + 3i$$

$$\Leftrightarrow z_2 = -2z + 2i + i$$

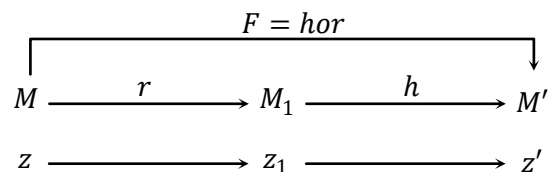
$$\Leftrightarrow z_2 = -2(z - i) + i$$

$$\Leftrightarrow (z_2 - i) = -2(z - i)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{VM_2} = -2 \overrightarrow{VM}$$

و بالتالي h تحاكي مركزه $V(i)$ و نسبته -2

ننطلق من الشكل التالي :



لدينا : $r(M) = M_1$

$$\Leftrightarrow (z_1 - i) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i)$$

$$\Leftrightarrow z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i) + i \quad (1)$$

و لدينا كذلك : $h(z_1) = z'$

$$\Leftrightarrow (z' - i) = -2(z_1 - i)$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} (z' - i) = -2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i)$$

$$-e^{i\frac{\pi}{3}} = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{و لدينا :}$$

$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$(z' - i) = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z - i) \quad \text{إذن :}$$

لدينا حسب السؤال (i)

$$M \xrightarrow{F} M'$$

$$z \xrightarrow{\quad} z' = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z - i) + i$$

لنحل المعادلة : $F(M) = M$

$$\Leftrightarrow z \left(2e^{i\frac{4\pi}{3}} - 1\right) = 2ie^{i\frac{4\pi}{3}} - i$$

$$\Leftrightarrow z \left(2e^{i\frac{4\pi}{3}} - 1\right) = i \left(2e^{i\frac{4\pi}{3}} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow z = i$$

$$\Leftrightarrow M \equiv \Omega$$

و بالتالي : Ω هي النقطة الوحيدة التي تحقق $F(M) = M$

لدينا : $F(A) = B$

$$\Leftrightarrow z_B - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z_A - i)$$

$$\Leftrightarrow z_B = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(a - i) + i$$

$$\Leftrightarrow z_B = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(a - i) + i$$

$$\Leftrightarrow z_B = (1 + i\sqrt{3})(i - a) + i$$

$$\Leftrightarrow z_B = i - a - \sqrt{3} - a\sqrt{3}i + i$$

$$\Leftrightarrow z_B = -(a + \sqrt{3}) + i(2 - a\sqrt{3})$$

■ 1 (ب)

لنبين أن * قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{1}{3} \text{ و } y \neq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow (1 - 3x) \neq 0 \text{ و } (1 - 3y) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - 3x)(1 - 3y) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3(x * y) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x * y) \neq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow (x * y) \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

إذن * قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

التجميعية : ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

لدينا : $x * (y * z) = x * (y + z - 3yz)$

$$= x + (y + z - 3yz) - 3x(y + z - 3yz)$$

$$= x + y + z - 3yz - 3xy - 3xz + 9xyz$$

و لدينا : $(x * y) * z = (x + y - 3xy) * z$

$$= (x + y - 3xy) + z - 3z(x + y - 3xy)$$

$$= x + y + z - 3yz - 3xy - 3xz + 9xyz$$

و بالتالي : * قانون تجميعي في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

التبادلية : لدينا : $x * y = x + y - 3xy$

$$= y + x - 3yx$$

$$= y * x$$

إذن تبادلي في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

العنصر المحايد : ليكن e العنصر المحايد في $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} ; x * e = e * x = x$$

$$\Leftrightarrow x + e - 3xe = x$$

$$\Leftrightarrow e(1 - 3x) = 0$$

بما أن $x \neq \frac{1}{3}$ فإن $(1 - 3x) \neq 0$

إذن : $e = 0$

مع : $0 \neq \frac{1}{3}$ لأن $e \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

و بنفس الطريقة ننتقل من الكتابتين $F(B) = C$ و $F(C) = D$ لنحصل على :

$$z_C = 2(\sqrt{3} - a) + i(2a\sqrt{3} + 3)$$

$$z_D = 8a - 7i$$

■ 3 (ب)

$$\frac{z_\Omega - z_A}{z_D - z_A} = \frac{i - a}{8a - 7i - a} = \frac{-1}{7} \in \mathbb{R} \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow (z_\Omega - z_A) = \frac{-1}{7}(z_D - z_A)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} = \frac{-1}{7}\overrightarrow{AD}$$



و بالتالي : النقط A و Ω و D نقط مستقيمة .

■ 3 (ج)

$$\frac{4z_B + 2z_C + z_D}{7} = \frac{7i}{7} = z_\Omega \quad \text{لدينا :}$$

نستنتج إذن أن : النقطة Ω هي مرجح النظمة المترنة :

$$\{(B, 4); (C, 2); (D, 1)\}$$

■ 3 (د)

ننتقل من كون D نقطة من المحور الحقيقي . و نضع : $a = x + iy$

$$\Leftrightarrow z_D \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (8a - 7i) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 8x + i(8y - 7) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (8y - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{7}{8}$$



إذن مجموعة النقط $A(a)$ التي من أجلها النقطة D تنتمي إلى المحور

الحقيقي تشكل مستقيما موازيا للمحور الحقيقي. و معادلته : $y = \frac{7}{8}$

التمرين الثاني : (4,0 ن)

■ 1 (أ)

$$1 - 3(x * y) = 1 - 3(x + y - 3xy)$$

$$= 1 - 3x - 3y + 9xy$$

$$= (1 - 3x) - 3y(1 - 3x)$$

$$= (1 - 3x)(1 - 3y)$$

■ (2) ب

لدينا : $\varphi'(x) = -3 < 0$

إن φ دالة تناقصية على $\mathbb{R}$

و منه : $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = \varphi^{-1}(]0; +\infty[)$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}(y) ; \varphi^{-1}(0) [$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{y}{3} \right) ; \frac{1}{3} [$$

$$=]-\infty ; \frac{1}{3} [$$

■ (2) ج

لدينا : $]-\infty ; \frac{1}{3} [\subset \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ جزء غير فارغ من $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

يعني : $]-\infty ; \frac{1}{3} [\subset \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

ليكن x و y عنصرين من $]-\infty ; \frac{1}{3} [$

لدينا : $x * y' = x * \left(\frac{-y}{1-3y} \right)$

$$= x - \frac{y}{1-3y} + \frac{3xy}{1-3y}$$

$$= \frac{x(1-3y) - y + 3xy}{1-3y}$$

$$= \frac{x-y}{1-3y}$$



و لدينا x و y عنصرين من $]-\infty ; \frac{1}{3} [$

إن : $x < \frac{1}{3}$ و $y < \frac{1}{3}$

و منه : $3x < 1$ و $3y < 1$

إن : $3x - 3y < 1 - 3y$ و $(1 - 3y) > 0$

(2)

(1)

نضرب طرفي المتفاوتة (1) في العدد الموجب : $\left(\frac{1}{1-3y} \right)$ نحصل على :

$$\frac{3x-3y}{1-3y} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{1-3y} < \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{1-3y} \in]-\infty ; \frac{1}{3} [$$

$$\Leftrightarrow x * y' \in]-\infty ; \frac{1}{3} [$$

و بالتالي : $\left(]-\infty ; \frac{1}{3} [; * \right)$ زمرة جزئية للزمرة $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\} ; * \right)$

التماثل :

ليكن x' مماثل x بالنسبة لـ *

$$\Leftrightarrow x * x' = x' * x = e$$

$$\Leftrightarrow x + x' - 3xx' = 0$$

$$\Leftrightarrow x'(1-3x) = -x$$

$$\Leftrightarrow x' = \frac{-x}{(1-3x)}$$



و لدينا : $1 \neq 0 \Rightarrow 1 - 3x \neq -3x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-3x} \neq \frac{-1}{3x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x}{1-3x} \neq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x}{1-3x} \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

و منه : كل عنصر x من $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ يقبل ممثلا $\left(\frac{-x}{1-3x} \right)$ في $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ بالنسبة للقانون * .

خلاصة :

$\left(\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\} ; * \right)$ زمرة تبادلية .

■ (2) د

$$\begin{array}{ccc} \left(\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\} ; * \right) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{R}^* ; \times) \\ x & \xrightarrow{\quad} & 1-3x \end{array}$$

لدينا :

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

لدينا : $\varphi(x * y) = 1 - 3(x * y)$

و منه حسب السؤال (1) د

$$\varphi(x * y) = (1 - 3x)(1 - 3y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

إن φ تشاكل من $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\} ; * \right)$ نحو $(\mathbb{R}^* ; \times)$

ليكن y عنصرا من $\mathbb{R}^*$

المعادلة $\varphi(x) = y$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا و هو : $x = \frac{1-y}{3}$

إن φ تقابل من $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\} ; * \right)$ نحو $(\mathbb{R}^* ; \times)$

و تقابله العكسي φ^{-1} معرف بما يلي :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^* ; \times) & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & \left(\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\} ; * \right) \\ y & \xrightarrow{\quad} & \frac{1-y}{3} \end{array}$$

نستنتج إذن أن : $x * (y \top z) = (x * y) \top (x * z)$

إذن القانون * توزيعي على القانون $\top$ (1)

و لدينا : $(\mathbb{R}, \top)$ و $(\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}, *)$ زمرة تبادليتان. (2)

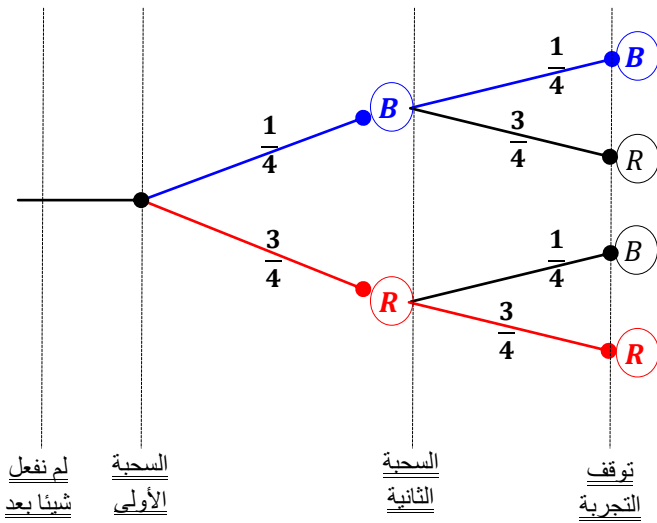
إذن من (1) و (2) نستنتج أن $(\mathbb{R}, \top, *)$ جسم تبادلي .

التمرين الثالث : (2,5 ن)

1 ■

$p[X = 2]$ هو احتمال توقف التجربة في السحبة رقم 2 .

نستعمل نموذج الشجرة التالي :

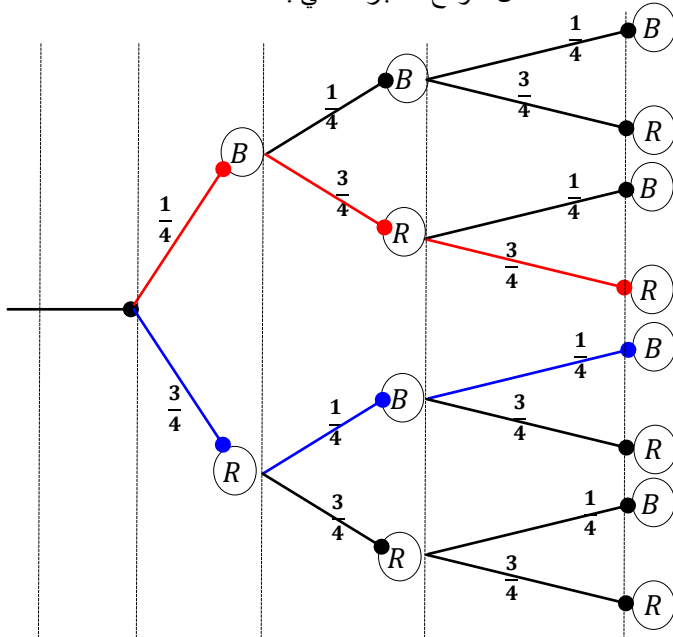


و منه احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون يساوي :

$$p[X = 2] = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{8}$$

$p[X = 3]$ هو احتمال توقف التجربة في السحبة رقم 3 .

نستعمل نموذج الشجرة التالي :



3 ■

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ و n عددا صحيحا طبيعيا.

$$\varphi(x^{(n)}) = \varphi\left(\underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ مرة}}\right) : \text{ لدينا}$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x^{(n)}) = \varphi(x) \times \varphi(x) \times \dots \times \varphi(x)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n$$

3 ■

ننتقل من الكتابة : $\varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n$

$$\Leftrightarrow 1 - 3x^{(n)} = (1 - 3x)^n$$

$$\Leftrightarrow x^{(n)} = \frac{1 - (1 - 3x)^n}{3}$$

4 ■

لدينا $\top$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R}$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} ; x + y - \frac{1}{3} \in \mathbb{R} : \text{ لأن}$$

• $\top$ تبادلي في $\mathbb{R}$ لأن $+$ تبادلي في $\mathbb{R}$.

$$\text{و لدينا : } x \top (y \top z) = x \top \left(x + y - \frac{1}{3}\right)$$

$$= x + x + y - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$$

$$= (x \top y) \top z$$

• إذن $\top$ قانون تجميعي في $\mathbb{R}$

ليكن e العنصر المحايد لـ $\top$ في $\mathbb{R}$. $x \top e = e \top x = x$

$$\Leftrightarrow x + e - \frac{1}{3} = x$$

$$\Leftrightarrow e = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$$

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$ و x' مماثله بالنسبة لـ $\top$

$$\Leftrightarrow x \top x' = x' \top x = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x + x' - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x' = \left(\frac{2}{3} - x\right) \in \mathbb{R}$$

• و بالتالي : $(\mathbb{R}, \top)$ زمرة تبادلية.

4 ■

ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من $\mathbb{R}$

$$\text{لدينا : } x * (y \top z) = x * \left(y + z - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 2x + y + z - 3(xy + xz) - \frac{1}{3}$$

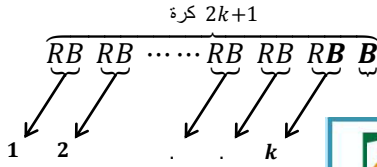
و لدينا : $(x * y) \top (x * z) = (x + y - 3xy) \top (x + z - 3xz)$

$$= 2x + y + z - 3(xy + xz) - \frac{1}{3}$$

■ (2) ب

بنفس الطريقة نفصل بين حالتين :

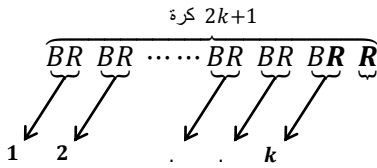
الحالة الأولى : توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين بيضاوين
و هذا ما يجسده التسلسل التالي :



و هذا يعني : أننا نحصل على k كرة حمراء و $(k + 1)$ كرة بيضاء.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^k : \text{ إذن احتمال هذه الحالة هو :}$$

الحالة الثانية : توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين حمراوين
و هذا ما يجسده التسلسل التالي :



و هذا يعني : أننا نحصل على $(k + 1)$ كرة حمراء و k كرة بيضاء.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} : \text{ إذن احتمال هذه الحالة هو :}$$

و بالتالي احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون في
السحبين $2k$ و $(2k + 1)$ هو :

$$p[X = 2k + 1] = \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^k + \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow p[X = 2k + 1] = \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)$$

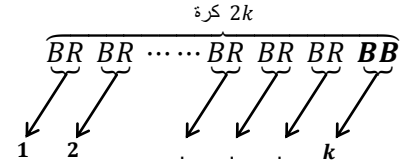
$$\Leftrightarrow p[X = 2k + 1] = \left(\frac{3}{16}\right)^k$$

$$\text{إذن : } p[X = 3] = \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}$$

■ (2) ا

$p[X = 2k]$ هو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون في السحبين
 $2k$ و $(2k - 1)$ و هنا نفصل بين حالتين و ذلك حسب لون الكرتين

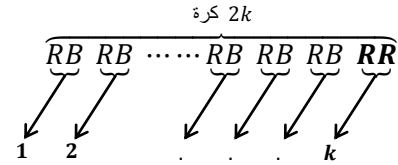
الحالة الأولى : توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين بيضاوين
و هذا ما يجسده التسلسل التالي :



و هذا يعني : أننا نحصل على $(k + 1)$ كرة بيضاء و $(k - 1)$ كرة حمراء.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} : \text{ إذن احتمال هذه الحالة هو :}$$

الحالة الثانية : توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين حمراوين
و هذا ما يجسده التسلسل التالي :



و هذا يعني : أننا نحصل على $(k + 1)$ كرة حمراء و $(k - 1)$ كرة بيضاء.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} : \text{ إذن احتمال هذه الحالة هو :}$$

و بالتالي احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون في
السحبين $(2k - 1)$ و $(2k)$ هو :

$$p[X = 2k] = \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow p[X = 2k] = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow p[X = 2k] = \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} \times \left(\frac{5}{8}\right)$$

التمرين الرابع : (10 ن)

■ (I) ①

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+2x)}{x} \right) = \lim_{\substack{u \rightarrow 1 \\ u=1+2x}} \left(\frac{2 \ln u}{u-1} \right)$$

$$= 2 \lim_{u \rightarrow 1} \left(\frac{\ln u - \ln 1}{u-1} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{1} \right) = 2 = f(0)$$



لأنه لدينا : $(\forall x_0 > 0) ; \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} \right) = \frac{1}{x_0}$

إذن f دالة متصلة في الصفر.

■ (I) ②

$$h_a(a) = (\ln(1+2a) - 2a)a^2 - (\ln(1+2a) - 2a)a^2 = 0$$

$$h_a(0) = -(\ln(1))a^2 = 0$$

و بما أن h_a دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $[0, a]$.

$$h_a(0) = h_a(a) \text{ و}$$

فإنه حسب مبرهنة رول يوجد عنصر b من $]0, a[$ بحيث : $h'_a(b) = 0$

$$\Leftrightarrow 2(\ln(1+2a) - 2a)b = a^2 \left(-2 + \frac{2}{1+2b} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$$

■ (I) ②

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} \right)$

$$= \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a=x}} \left(\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} \right)$$

لدينا حسب السؤال (i) يوجد b مرتبط بـ a بحيث : $a < b < 0$

$$\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b} \text{ و}$$

إذا كان a يؤول إلى الصفر فإن b يؤول كذلك إلى الصفر

و ذلك بسبب التأثير : $a < b < 0$

و بالتالي النهاية تصبح :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} \right) = \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{-2}{1+2b} \right) = -2 \in \mathbb{R}$$

إذن f دالة قابلة للإشتقاق في الصفر و $f'(0) = -2$

■ (I) ③

لدينا f دالة قابلة للإشتقاق على $I \setminus \{0\}$ لأنها مجموع دوال اعتيادية قابلة للإشتقاق على $I \setminus \{0\}$.

و لدينا :

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{1+2x} - \ln(1+2x) \right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{2x - (1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)} \right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$$

■ (I) ③

لدينا g دالة معرفة و متصلة و قابلة للإشتقاق على I .

و لدينا كذلك

$$g'(x) = 2 - \left(2 \ln(1+2x) + \frac{2(1+2x)}{(1+2x)} \right)$$

$$= -2 \ln(1+2x)$$

إذا كان $x = 0$ فإن $g'(x) = 0$

إذا كان $x > 0$ فإن $g'(x) < 0$

إذا كان $x < 0$ فإن $g'(x) > 0$

و لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}^+} 2x - (1+2x) \ln(1+2x)$$

$$= -1 - \lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}^+} (1+2x) \ln(1+2x)$$

$$= -1 - \lim_{\substack{u \rightarrow 0^+ \\ u=1+2x}} u \ln(u)$$

$$= -1 - 0$$

$$= -1$$



و لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - (1+2x) \ln(1+2x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \left(\frac{1}{x} + 2 \right) \ln(1+2x) \right)$$

$$= (+\infty)(-\infty)$$

$$= -\infty$$

■ (I) 4 (ب)

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعاً على $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

إن f متصلة و تناقصية قطعاً على $[1; 2]$ لأن $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\supset [1; 2]$

و منه f تقابل من $[1; 2]$ نحو صورته $[f(2); f(1)]$

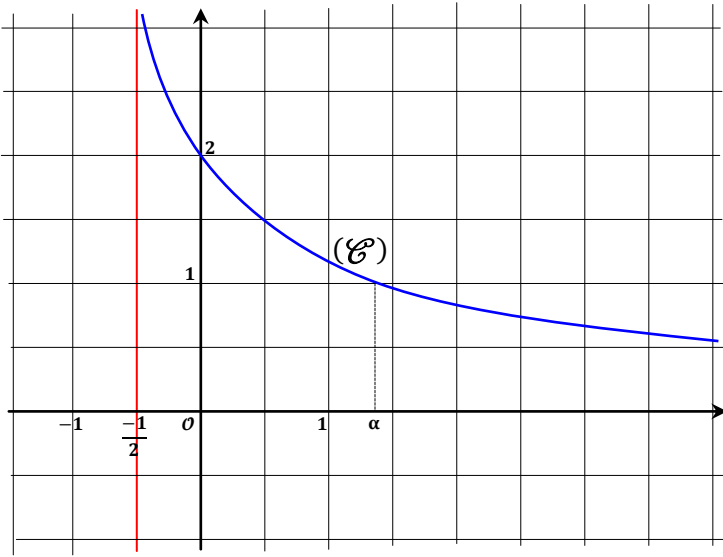
يعني f تقابل من $[1; 2]$ نحو $[0,8; 1,1]$

و بما أن العدد 1 ينتمي إلى المجال $[0,8; 1,1]$

فإنه يمتلك سابقاً واحداً بالتقابل f من المجال $[1; 2]$

أو بتعبير رياضي جميل : $\exists! \alpha \in [1; 2] : f(\alpha) = 1$

■ (I) 4 (ج)



■ (II) 1 (أ)

الدالة φ عبارة عن مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على I

إن φ قابلة للإشتقاق على I .

و لدينا : $\varphi'(x) = \frac{2}{1+2x}$

لدينا من أجل : $x \geq 1 : 6 \leq 2 + 4x$

$\Leftrightarrow 6 \leq 2(1+2x)$

$\Leftrightarrow \frac{2}{1+2x} \leq \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \varphi'(x) \leq \frac{2}{3} \quad (1)$



و لدينا كذلك : $x \in I$: إن $x > -\frac{1}{2}$

و منه : $1 + 2x > 0$: إن $\frac{2}{1+2x} > 0$

يعني : $\varphi'(x) > 0 \quad (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$(\forall x \geq 1) ; 0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$

نستنتج جدول تغيرات الدالة g كما يلي .

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$g'(x)$		0	
g	-1	0	$-\infty$

نلاحظ حسب هذا الجدول أن الدالة g متصلة على I و تقبل 0 كقيمة قصوى

إن : $(\forall x \in I) ; g(x) \leq 0$

و بالتالي : $\forall x \in I \setminus \{0\} ; g(x) < 0$

■ (I) 3 (ج)

لدينا : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$

إن إشارة $f'(x)$ متعلقة بإشارتي $g(x)$ و $(1+2x)$

و هو ما نلخصه في الجدول التالي :

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$g(x)$		0	
$(1+2x)$	0	1	
$f'(x)$			
f	$+\infty$	2	0

■ (I) 4 (أ)

$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{\substack{u \rightarrow 0^+ \\ u=2x+1}} \left(\frac{2 \ln u}{u-1} \right) = \frac{2(-\infty)}{(-1)} = +\infty$

إن المستقيم ذو المعادلة $x = -\frac{1}{2}$ مقارب عمودي للمنحنى $(\mathcal{C})$

لدينا كذلك : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ u=2x+1}} \left(\frac{2 \ln u}{u-1} \right)$
 $= \lim_{u \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{\ln u}{u} \right) \left(\frac{u}{u-1} \right) = 0$

إن محور الأفاصيل مقارب أفقي للمنحنى $(\mathcal{C})$ بجوار $+\infty$.

و بما أن : $u_n \geq 1$ (لأن : $u_n \in J$)

فإن : $c > u_n \geq 1$ يعني : $c \geq 1$

و منه : $0 < \varphi'(c) \leq \frac{2}{3}$

يعني : $|\varphi'(c)| \leq \frac{2}{3}$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $|u_n - \alpha|$ نحصل على :

$$\Leftrightarrow |\varphi'(c)| |u_n - \alpha| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha|$$

$$\Leftrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha|$$

و من أجل $(n-1)$ نجد :

$$\Leftrightarrow |u_n - \alpha| \leq \frac{2}{3} |u_{n-1} - \alpha|$$

$$\leq \frac{2}{3} \frac{2}{3} |u_{n-2} - \alpha|$$

$$\leq \frac{2}{3} \frac{2}{3} \frac{2}{3} |u_{n-3} - \alpha|$$

⋮ ⋮ ⋮

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$(3) \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha| \quad \text{إذن :}$$

من جهة أخرى لدينا : $\alpha > 0$ يعني : $-\alpha < 0$

أي : $1 - \alpha < 1$ و منه : $|1 - \alpha| < 1$

أي : $|u_0 - \alpha| < 1$

$$(4) \quad \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{و منه :}$$

من (3) و (4) نستنتج أن :

$$(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

■ (II) 2 ب

بما أن : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$; $(\forall n \geq 0)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad \text{و}$$

(لأنها متتالية هندسية أساسها موجب و أصغر من 1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - \alpha| = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha \quad \text{أي :}$$

■ (II) 1 ب

لدينا حسب نتيجة السؤال ■ (I) 4 ب : $f(\alpha) = 1$



$$\Leftrightarrow \frac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha} = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+2\alpha) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \varphi(\alpha) = \alpha$$

و لدينا : $\varphi'(x) = \frac{2}{1+2x} > 0$ إذن : φ دالة تزايدية قطعاً على I

و منه : $\varphi([1; \alpha]) = [\varphi(1); \varphi(\alpha)] = [\ln 3; \alpha]$

و لدينا : $[\ln 3; \alpha] \approx [1,1; \alpha] \subset [1; \alpha]$

إذن : $\varphi(J) \subset J$

■ (II) 2 ا

باستعمال البرهان بالترجع

لدينا : من أجل $n = 0$: $u_0 = 1 \in [1; \alpha] = J$

نفترض أنه : $(\forall n \geq 0) ; u_n \in J$

إذن : $\varphi(u_n) \in \varphi(J)$

و بما أن : $\varphi(J) \subset J$ فإن : $\varphi(u_n) \in J$

يعني : $\ln(1+2u_n) \in J$ و منه : $u_{n+1} \in J$

و بالتالي : $(\forall n \geq 0) ; u_n \in J$

■ (II) 2 ب

لدينا الدالة φ قابلة للإستقراق على المجال I

نستطيع إذن تطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية على أي مجال يوجد ضمن I

نختار المجال الذي طرفاه u_n و α .

إذن : يوجد c محصور بين u_n و α بحيث : $\frac{\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)}{u_n - \alpha} = \varphi'(c)$

$$\Rightarrow \left| \frac{\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)}{u_n - \alpha} \right| = |\varphi'(c)|$$

$$\Rightarrow |\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)| = |\varphi'(c)| |u_n - \alpha|$$

لدينا حسب السؤال : ■ (II) 1 ا

$$(\forall x \geq 1) ; 0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$$

■ (III) 1 أ

لدينا حسب الأسئلة السابقة : f دالة متصلة على I .

إن f متصلة على أي مجال على شكل $[0, x]$ بحيث : $x \in I$

و منه f تقبل دالة أصلية F بحيث : $F'(x) = f(x)$

و منه : F قابلة للإشتقاق على المجال I .

■ (III) 1 ب

نعلم أن : $f(x) > 0$; $(\forall x \in I)$

إن : $F'(x) > 0$; $(\forall x \in I)$

و منه F دالة تزايدية قطعاً على I

■ (III) 2 أ

لدينا : $(\forall t \geq 1) ; \frac{1}{t} \geq \frac{1}{2t+1}$ (*)

و لدينا : $(\forall t \geq 1) ; 2t+1 \geq 3 > 1$

إن : $(\forall t \geq 1) ; \ln(2t+1) > 0$

نضرب طرفي المتفاوتة (*) في العدد الموجب $\ln(2t+1)$ نحصل على :

$$\frac{\ln(2t+1)}{t} > \frac{\ln(2t+1)}{2t+1}$$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{t} \right) dt \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1} \right) dt$$

$$\Rightarrow \int_1^x f(t) dt \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1} \right) dt$$

$$\Rightarrow F(x) - \int_1^x f(x) dt \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1} \right) dt \quad (*)$$

لدينا f متصلة على $[0; 1]$

إن التكامل : $\int_1^x f(x) dt$ يُعبر عن قياس لمساحة موجبة

$$\text{أي : } \int_1^x f(x) dt \geq 0 \text{ و منه : } -\int_1^x f(x) dt \leq 0$$

$$(*) \quad F(x) - \int_1^x f(x) dt \leq F(x) \quad \text{يعني : } (**)$$

من (*) و (**) نستنتج أن :

$$(\forall x \geq 1) ; F(x) \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1} \right) dt$$

■ (III) 2 ب

$$[(\ln(1+2t))^2]' = \frac{4 \ln(1+2t)}{(1+2t)} \quad \text{لاحظ أن :}$$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{(1+2t)} \right) dt = \frac{1}{4} [(\ln(1+2t))^2]_1^x$$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{(1+2t)} \right) dt = \frac{1}{4} ((\ln(1+2x))^2 - (\ln 3)^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} ((\ln(1+2x))^2 - (\ln 3)^2) \right) = +\infty$$

فإنه بالضرورة لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

و ذلك بسبب المتفاوتة التالية :

$$(\forall x \geq 1) ; F(x) \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1} \right) dt$$

■ (III) 3 أ

نعتبر المجال $\left[\frac{-1}{2}; x \right]$ بحيث : $x \in I$

لدينا : $\tilde{F}$ دالة معرفة و متصلة على المجال $\left[\frac{-1}{2}; x \right]$

لأن : F متصلة على I و F متصلة على اليمين في $\frac{-1}{2}$ حسب الافتراض

و لدينا كذلك $\tilde{F}$ قابلة للإشتقاق على $\left[\frac{-1}{2}; x \right]$ لأن : F قابلة للإشتقاق على I

إن حسب مبرهنة التزايد المتناهية :

$$\Leftrightarrow \exists c \in \left] \frac{-1}{2}; x \right[; \frac{\tilde{F}(x) - \tilde{F}\left(\frac{-1}{2}\right)}{x - \left(\frac{-1}{2}\right)} = \tilde{F}'(c)$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in \left] \frac{-1}{2}; x \right[; \frac{F(x) - \ell}{x + \frac{1}{2}} = f(c)$$

$$\exists c \in \left] \frac{-1}{2}; x \right[; (F(x) - \ell) = f(c) \left(x + \frac{1}{2} \right) \quad (\#)$$

و لدينا من جهة أخرى : $c \in \left] \frac{-1}{2}; x \right[$ يعني : $x > c$

و منه : $f(x) < f(c)$ لأن f تناقصية.

$$\text{إن : } \left(x + \frac{1}{2} \right) f(x) < \left(x + \frac{1}{2} \right) f(c)$$

و منه باستعمال النتيجة (#) نحصل على :

$$(F(x) - \ell) \geq f(x) \left(x + \frac{1}{2} \right) \quad (*)$$

■ (III) 3 ب

$$\left(\frac{F(x) - \ell}{x + \frac{1}{2}} \right) \geq f(x) \quad \text{المتفاوتة (*) تصبح :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}} f(x) = +\infty \quad \text{و نعلم أن :}$$

و بالتالي : F غير قابلة للإشتقاق على اليمين في : $\frac{-1}{2}$

