



C: NS24

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
وتقنيات الأطارات
والبحث العلمي
كتابة الدولة المكلفة بالتعليم المدرسي



المركز الوطني للتقدير والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2008
الموضوع

9	المعامل:	الرياضيات	المادة:
4	مدة الإنجاز:	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعب (ة):

التمرين الأول: (3,25 نقطة)

نذكر أن $(\mathbb{C}, +, \times)$ حلقة واحدية و $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ جسم تبادلي. نضع:

$$E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ و } J = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \text{ و } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) أ) بين أن $(E, +, \times)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ 0,75

ب) بين أن الأسرة (I, J) أساس في الفضاء المتجهي $(E, +, \times)$ 0,5

$$\text{حيث: } E^* = E \setminus \{M(0, 0)\} \quad \begin{aligned} f: \mathbb{C}^* &\longrightarrow E^* \\ a + ib &\longrightarrow M(a, b) \end{aligned} \quad (2) \text{ نعتبر التطبيق:}$$

أ) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ 0,25

ب) بين أن f تشاكل تقابلية من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (E^*, \times) 0,5

ج) بين أن $(E, +, \times)$ جسم تبادلي. 0,5

(4) حل في E المعادلة: $(X^3 = X \times X \times X \quad J \times X^3 = I) \quad (\text{حيث } J = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix})$ 0,75

التمرين الثاني: (3,75 نقطة)

ليكن a عددا عقديا غير منعدم و \bar{a} مرافق العدد a .

I- نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة: $iz^2 + (a + \bar{a} - i)z - \bar{a} - ia\bar{a} = 0$

(1) أ) تحقق أن مميز المعادلة (G) هو: $\Delta = (a - \bar{a} - i)^2$ 0,5

ب) حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة (G) . 0,5

(2) بين أن a حل للمعادلة (G) إذا وفقط إذا كان $\text{Re}(a) = \text{Im}(a)$ (حيث $\text{Re}(a)$ هو الجزء الحقيقي للعدد العقدي a و $\text{Im}(a)$ هو جزءه التخييلي) 0,5

الصفحة 2 4 C: NS24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا (الدورة العادية 2008) الموضوع	الرياضيات المادة :	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) الشعب(ة):
---	---	---	---

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعمد منظم مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نفترض أن (a) نعتبر النقط A و B و C التي أحقها على التوالي هي a و $i\bar{a}$ و $1+ia$

$$Z = \frac{(1+ia)-a}{(i\bar{a})-a} \quad (1) \text{ نضع :}$$

$$\bar{Z} = \frac{(i-1)\bar{a} - i}{i\bar{a} - a} \quad (1) \text{ تتحقق أن :}$$

$$Im(a) = \frac{1}{2} \quad (2) \text{ بين أن النقط } A \text{ و } B \text{ و } C \text{ مستقيمية إذا و فقط إذا كان}$$

$$Im(a) \neq \frac{1}{2} \quad (2) \text{ نفترض في هذا السؤال أن}$$

نعتبر R_1 الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و R_2 الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$

$$R_2(C) = C' \text{ و } R_1(B) = B' \quad \text{نضع :}$$

لتكن النقطة E منتصف القطعة $[BC]$

أ) حدد b' و c' لحقي النقطتين B' و C' على التوالي.

ب) بين أن المستقيمين (AE) و $(B'C')$ متعمدان و أن $B'C' = 2AE$.

0,5

0,75

التمرين الثالث: (3 نقط)

I- نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة التالية : $(E) \quad 35u - 96v = 1$

1) تتحقق أن الزوج $(11,4)$ حل خاص لمعادلة (E)

2) استنتاج مجموعة حلول المعادلة (E)

0,25

0,5

II- نعتبر في المجموعة \mathbb{N} المعادلة التالية: $(F) \quad x^{35} \equiv 2 [97]$

1) ليكن x حل المعادلة (F)

أ) بين أن العدد 97 أولي و أن x و 97 أوليان فيما بينهما.

0,5

ب) بين أن : $x^{96} \equiv 1 [97]$

0,5

ج) بين أن : $x \equiv 2^{11} [97]$

0,5

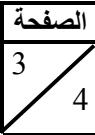
2) بين أنه إذا كان العدد الصحيح الطبيعي x يحقق $x \equiv 2^{11} [97]$ فإن x حل لمعادلة (F)

0,25

3) بين أن مجموعة حلول المعادلة (F) هي مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية التي تكتب على

0,5

الشكل $k \in \mathbb{N}$ حيث $11 + 97k$

 الصفحة 3 4	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا (الدورة العادية 2008) الموضوع	الرياضيات المادة :
C: NS24		شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) الشعب (ة):

التمرين الرابع: (10 نقط)

I - لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R}_+ بما يلي :

$$f(x) = 2x - e^{-x^2}$$

و ليكن (C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعمد منظم $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها.

ب) احسب (x') لـ x من \mathbb{R}_+ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R}_+ وأن $0 < \alpha < 1$

د) ادرس إشارة (x) على المجال $[0, 1]$

(2) أنشئ المنحني (C) . (نأخذ: $\alpha \approx 0,4$).

II - نعتبر الدالتي العدديتين φ و g للمتغير الحقيقي x المعرفتين على \mathbb{R}_+ بما يلي :

$$g(x) = x^2 - \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{و} \quad \begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt ; x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

(1) أ) بين أن : $\frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt = e^{-c^2}$

ب) استنتج أن : $\int_0^1 e^{-t^2} dt < 1$

(2) أ) بين أن: $g(\alpha) = \int_0^\alpha f(t) dt$

ب) بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+ وأن: $(\forall x \in \mathbb{R}_+) ; g'(x) = f(x)$

ج) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $[\alpha, 1]$

(3) أ) بين أن الدالة φ متصلة على اليمين في الصفر.

ب) باستعمال متكاملة بالأجزاء بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}_+) ; \varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{2}{x} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$

ج) بين أن الدالة φ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+ وأن: $(\forall x \in \mathbb{R}_+) ; \varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$

د) بين أن: $\varphi([0, 1]) \subset [0, 1]$

$$(4) \text{ أ) بين أنه لكل عدد حقيقي } x \text{ من } \mathbb{R}_+ \text{ لدينا: } \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leq \frac{x^3}{3}$$

 الصفحة 4 4	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا (الدورة العادية 2008) الموضوع C: NS24	الرياضيات المادة :	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) الشعب (ة):
--	--	-------------------------------------	--

$\text{ب) بين أن : } \left(\forall x \in]0,1[\right) ; \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$ $\text{ج) بين أن : } \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^* \right) ; \varphi(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$ $\text{(5) نعتبر المتتالية العددية } (u_n)_{n \geq 0} \text{ المعرفة بما يلي : } u_0 = \frac{2}{3} \text{ و } u_{n+1} = \varphi(u_n) \text{ .}$ $\text{أ) بين أن : } \left(\forall n \in \mathbb{N} \right) ; 0 \leq u_n \leq 1$ $\text{ب) بين أن : } \left(\forall n \in \mathbb{N} \right) ; u_n - \beta \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n$ $\text{ج) استنتج أن المتتالية } (u_n)_{n \geq 0} \text{ متقاربة و حدد نهايتها.}$	0,5 0,25 0,5 0,5 0,5
--	--------------------------------------