

نعود إلى التمرين لاستغلال الخاصية المبرهن عليها :

ليكن x حلا للنظمة (S) .

نريد أن نبين أن $pq / (x - x_0)$.

لدينا : x_0 و x حلين للنظمة (S) .

$$\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \\ x_0 \equiv a[p] \\ x_0 \equiv b[q] \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

$$(\exists k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}) ; \begin{cases} (x - a) = k_1 p \\ (x - b) = k_2 q \\ (x_0 - a) = k_3 p \\ (x_0 - b) = k_4 q \end{cases} \quad \text{و منه :}$$

$$\begin{aligned} (x - x_0) &= (x - a) - (x_0 - a) & \text{لدينا :} \\ &= k_1 p - k_3 p \\ &= (k_1 - k_3)p \end{aligned}$$

$$(1) \quad p / (x - x_0) \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned} (x - x_0) &= (x - b) - (x_0 - b) & \text{و لدينا كذلك :} \\ &= k_2 q - k_4 q \\ &= (k_2 - k_4)q \end{aligned}$$

$$(2) \quad q / (x - x_0) \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{cases} p / (x - x_0) \\ q / (x - x_0) \\ p \wedge q = 1 \end{cases} \quad \text{حصلنا لحد الآن على :}$$

من هذه الأشياء نستنتج حسب الخاصية أن : $pq / (x - x_0)$.

■ (3)

ننتقل من : $pq / (x - x_0)$

$$\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases} \quad \text{و نريد أن نبين أن :}$$

$$\begin{cases} x_0 \equiv a[p] \\ x_0 \equiv b[q] \end{cases} \quad \text{لدينا } x_0 \text{ حل للنظمة } (S) \text{ يعني :}$$

$$(\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}) ; \begin{cases} x_0 = k_1 p + a & (1) \\ x_0 = k_2 q + b & (2) \end{cases} \quad \text{و منه :}$$

و لدينا حسب الإنطلاقة : $pq / (x - x_0)$

$$(3) \quad (\exists k_3 \in \mathbb{Z}) ; (x - x_0) = k_3 pq \quad \text{إذن :}$$

من (1) و (3) نستنتج أن : $x - (k_1 p + a) = k_3 pq$

يعني : $x - a = p(k_3 q + k_1)$ أي : $p / (x - a)$

$$(4) \quad x \equiv a[p] \quad \text{و بالتالي :}$$

■ (1) (i)

لدينا : $p \wedge q = 1$

إذن حسب مبرهنة Bezout :

$$(\exists u_0, v_0 \in \mathbb{Z}) : pu_0 + qv_0 = 1$$

■ (1) (b)

ليكن : $x_0 = bpu_0 + aqv_0$

لدينا حسب السؤال (1) (i) $qv_0 = 1 - pu_0$

$$x_0 = bpu_0 + a(1 - pu_0) \quad \text{إذن :}$$

$$x_0 = bpu_0 + a - apu_0 \quad \text{يعني :}$$

$$x_0 = p(bu_0 - au_0) + a \quad \text{و منه :}$$

$$x_0 - a = p(bu_0 - au_0) \quad \text{إذن :}$$

$$(1) \quad x_0 \equiv a[p] \quad \text{يعني : } p / (x_0 - a) \text{ و بالتالي :}$$

و لدينا كذلك حسب السؤال (1) (i) $pu_0 = 1 - qv_0$

$$x_0 = b(1 - qv_0) + v_0 a \quad \text{إذن :}$$

$$= b - bq v_0 + qv_0 a$$

$$= q(v_0 a - bv_0) + b$$

$$x_0 - b = q(v_0 a - bv_0) \quad \text{و منه :}$$

$$(2) \quad x_0 \equiv b[q] \quad \text{يعني : } q / (x_0 - b) \text{ و بالتالي :}$$

من (1) و (2) نستنتج أن x_0 حل للنظمة (S) .

■ (2)

للإجابة على هذا السؤال نحتاج إلى خاصية قوية في الحسابيات و هي :

$$\begin{cases} m/a \\ n/a \\ m \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow mn/a$$

لنبرهن أولا على صحة هذه الخاصية

(*)

لدينا : m/a إذن : $a = mk$ $(\exists k \in \mathbb{Z})$

و لدينا كذلك : n/a إذن حسب (*) : n/mk

و بما أن $m \wedge n = 1$ فإنه حسب (Gauss) : n/k

(**)

يعني : $k = nk'$ $(\exists k' \in \mathbb{Z})$

من (*) و (**) نستنتج أن : $a = mnk'$

$$\text{إذن : } mn/a$$

ننتقل من النتيجة (4) .

$$\begin{aligned}
 (4) \quad 1 &= 3 - 2 \\
 \xRightarrow{\text{حساب (3)}} 1 &= 3 - (5 - 3) \\
 &= 2 \times 3 - 5 \quad \text{يعني} \\
 \xRightarrow{\text{حساب (2)}} 1 &= 2(8 - 5) - 5 \\
 &= 2 \times 8 - 3 \times 5 \quad \text{يعني} \\
 \xRightarrow{\text{حساب (1)}} 1 &= 2 \times 8 - 3(13 - 8) \\
 &= 5 \times 8 - 3 \times 13 \quad \text{يعني}
 \end{aligned}$$

من هذه الكتابة الأخيرة نستنتج أن: $u_0 = 5$ و $v_0 = -3$

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 3pu_0 + qv_0 \\
 &= (3 \times 8 \times 5) - (13 \times 3) \\
 &= 81
 \end{aligned}$$

إذن نستنتج التكافؤ التالي:

$$x \equiv 81[104] \Leftrightarrow (S_0) \text{ حل النظام}$$

$$x = 104k + 81 ; \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{و بالتالي}$$

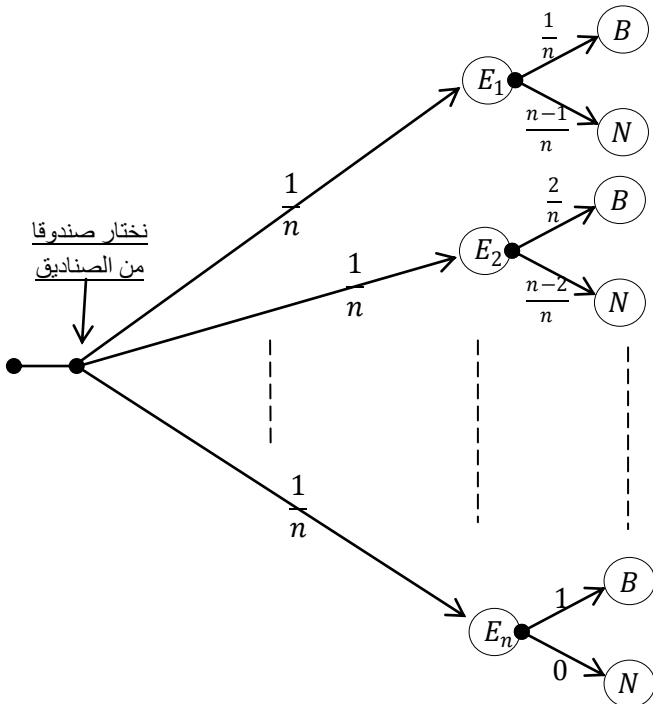
التمرين الثاني: (2,0 ن)

■ 1

في كل مراحل هذا التمرين، نشغل بـ: $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned}
 E_i &= \text{"اختيار الصندوق رقم } i \text{"} \\
 B &= \text{"سحب كرة بيضاء"} \\
 N &= \text{"سحب كرة سوداء"}
 \end{aligned}$$

نحول التجربة الواردة في التمرين إلى شجرة الاحتمالات التالية:



من (2) و (3) نستنتج أن: $x - (k_2q + b) = k_3pq$

$$(x - b) = q(k_3p + k_2) \quad \text{إذن}$$

$$(5) \quad x \equiv b[q] \quad \text{يعني} \quad q / (x - b)$$

من (4) و (5) نستنتج أن x حل للنظمة (S).

■ 4

من السؤالين (2) و (3) نستنتج التكافؤ التالي:

$$x \text{ حل للنظمة (S)} \Leftrightarrow pq / (x - x_0)$$

$$\text{إذن} \quad x \equiv x_0[pq] \quad \text{حل للنظمة (S)}$$

إذن مجموعة حلول النظمة (S) هي: $\overline{x_0}$

نشير إلى أن $\overline{x_0}$ عنصر من الفضاء المتجهي: $\mathbb{Z}/(pq)\mathbb{Z}$

بتعبير آخر: مجموعة حلول النظمة (S) هي جميع الأعداد النسبية التي يكون باقي قسمتها على pq مساوياً لـ x_0 .

■ 5

نريد أن نحل في $\mathbb{Z}$ النظمة (S0) التالية: $(S_0): \begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$

الأسئلة السابقة تعتبر دراسة نظرية لحلول النظمة: $\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$

$$\text{مع:} \quad p \wedge q = 1$$

و السؤال الخامس عبارة عن تطبيق عددي لنتائج تلك الدراسة

ليكن x حلاً للنظمة (S0).

$$\text{هذا يعني:} \quad x \equiv x_0[8 \times 13]$$

لنحسب الآن x_0 . نضع: $p = 8$ و $q = 13$

لدينا:

$ \begin{array}{r l} 13 & 8 \\ \hline & 1 \end{array} \mapsto 5 = 13 - 8 $	(1)
$ \begin{array}{r l} 8 & 5 \\ \hline & 1 \end{array} \mapsto 3 = 8 - 5 $	(2)
$ \begin{array}{r l} 5 & 3 \\ \hline & 1 \end{array} \mapsto 2 = 5 - 3 $	(3)
$ \begin{array}{r l} 3 & 2 \\ \hline & 1 \end{array} \mapsto 1 = 3 - 2 $	(4)

$$= \frac{1}{n^2} \left(\frac{2 \left(\frac{n-1}{2} \right) \left(\frac{n+1}{2} \right)}{2} + \left(\frac{n-1}{2} \right) \right)$$

$$= \frac{n^2 - 1}{4n^2} + \frac{n-1}{2n^2} = \frac{n^2 - 1}{4n^2} + \frac{2(n-1)}{4n^2}$$

$$= \frac{n^2 + 2n - 3}{4n^2}$$

$$= \frac{(n-1)(n+3)}{4n^2}$$

التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ ① ②

لدينا : $(H) : \{M(z)/z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1\}$

نضع : $z = x + iy$

$$M(z) \in (H) \Leftrightarrow (x + iy)^2 + (x - iy)^2 - (x^2 + y^2) = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3y^2 = 1$$

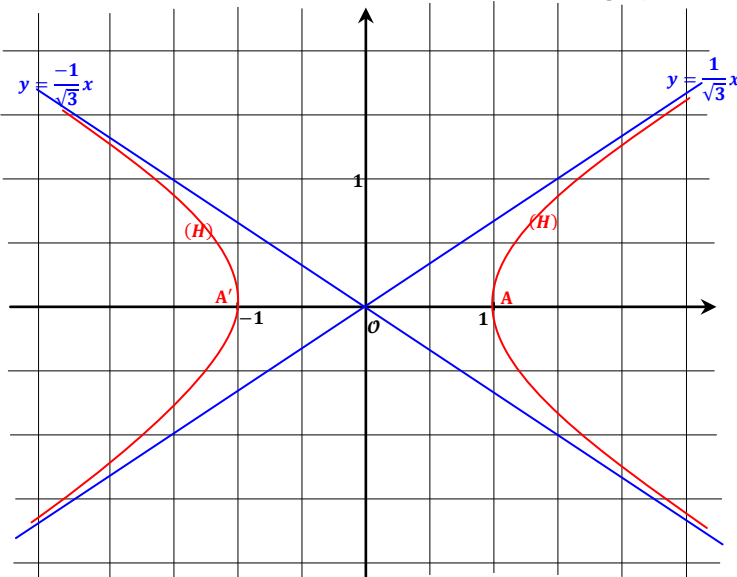
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

إذن (H) هذلول مركزه : $O(0,0)$

و رأسه : $A(1,0)$ و $A'(-1,0)$

و مقاربه : $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ و $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$

■ ① ② ③



انطلاقا من هذه الشجرة نستنتج أن :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{i}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i$$

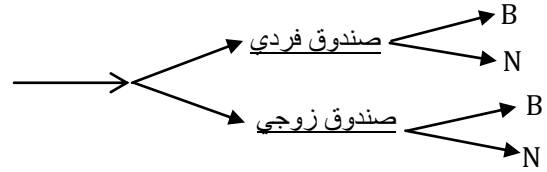
$$= \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$= \frac{(n+1)}{2n}$$

■ ②

في هذا السؤال لا يهمنا لون الكرة و يمكن إعادة صياغة السؤال بالطريقة التالية :

" ما هو احتمال اختيار صندوق فردي من بين n صندوق " و هذه التجربة يمكن نمذجتها بالشجرة التالية :



من جهة أخرى لدينا n عدد فردي

إذن في المجموعة $\{1; 2; 3 \dots; n\}$ يوجد $\frac{(n+1)}{2}$ عدد فردي.

إذن : $p(\text{صندوق فردي}) = \frac{\text{عدد الصناديق الفردية}}{\text{عدد الصناديق}}$

$$= \frac{(n+1)}{2} = \frac{(n+1)}{2n}$$

■ ③

$B_i =$ " الحصول على كرة بيضاء علما أن السحب تم من صندوق رقمه عدد فردي "

بالعودة إلى شجرة الاحتمالات السابقة نكتب :

$$P(B_i) = \sum_{i \text{ فردي}}^n P(B \cap E_i) = \sum_{i \text{ فردي}}^n \frac{i}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=2k+1}^n i$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (2k+1) = \frac{1}{n^2} \left(2 \left(\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} k \right) + \left(\frac{n-1}{2} \right) \right)$$

باستعمال العلاقة (*) نحصل على :

$$\begin{aligned}\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - |\varphi|^2 &= 2|ab|^2 - ((ab)^2 + (\bar{a}\bar{b})^2) + 1 \\ &+ (ab)^2 + (\bar{a}\bar{b})^2 - 2|ab|^2 = 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - |\varphi|^2 = 1} \quad \text{حصلنا إذن على العلاقة التالية}$$

أو باستعمال الترميز الأصلي

$$\boxed{(\varphi(a, b))^2 + (\overline{\varphi(a, b)})^2 - |(\varphi(a, b))|^2 = 1}$$

و بالتالي : $M(\varphi(a, b))$ نقطة من (H) .

■ (2) ب

$$\varphi(z, 1) = z + \bar{z} - \bar{z} = z$$

$$\begin{aligned}\varphi(z, \bar{z}) &= zz + \bar{z}\bar{z} - \bar{z}\bar{z} \\ &= z^2 + \bar{z}^2 - \bar{z}z \\ &= z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

■ (3)

نريد أن نبين أن * تجميعي و تبادلي و يقبل عنصرا محايدا
و كل عنصر يمتلك ماثلا في (H) بالقانون * .

نحتاج في البداية أن نبين الخاصيتين التاليتين و المتعلقتين بهذا التمرين فقط.

(2)

(1)

$$\boxed{\overline{\varphi(a, b)} = \varphi(\bar{a}, \bar{b})} \quad \text{و} \quad \boxed{\varphi(a, b) - \varphi(\bar{a}, \bar{b}) = ab - \bar{a}\bar{b}}$$

$$\begin{aligned}\overline{\varphi(a, b)} &= \overline{(ab + \bar{a}\bar{b} - ab)} \\ &= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{b} - ab \\ &= \varphi(\bar{a}, \bar{b})\end{aligned} \quad \text{لدينا :}$$

و لدينا كذلك :

$$\begin{aligned}\varphi(a, b) - \varphi(\bar{a}, \bar{b}) &= (ab + \bar{a}\bar{b} - \bar{a}\bar{b}) - (\bar{a}\bar{b} + a\bar{b} - ab) \\ &= ab - \bar{a}\bar{b}\end{aligned}$$

الآن ليكن $M(a)$ و $M(b)$ و $M(c)$ ثلاثة عناصر من (H) .

$$\begin{aligned}(M(a) * M(b)) * M(c) &= M(\varphi(a, b)) * M(c) \\ &= M(\varphi(a, b)) * M(c) \\ &= M[\varphi(\varphi(a, b), c)]\end{aligned} \quad \text{لدينا :}$$

■ (2) ا

لتكن $M(a)$ و $M(b)$ نقطتين من (H)

$$\varphi(a, b) = a\bar{b} + \bar{a}b - \bar{a}\bar{b} \quad \text{نضع :}$$

من أجل اختصار الكتابة نضع مؤقتا : $\varphi(a, b) = \varphi$

لدينا : $M(a)$ و $M(b)$ نقطتان من (H) .

$$\begin{cases} a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2 = 1 \\ b^2 + \bar{b}^2 - |b|^2 = 1 \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

نضرب المتساويتين طرفا بطرف نحصل على :

$$(a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2)(b^2 + \bar{b}^2 - |b|^2) = 1$$

$$\begin{aligned}&((a\bar{b})^2 + (\bar{a}b)^2) - (a^2|b|^2 + b^2|a|^2) \\ &+ (\bar{a}^2|b|^2 + \bar{b}^2|a|^2) \\ &= 1 - ((ab)^2 + (\bar{a}\bar{b})^2) - |ab|^2\end{aligned} \quad \text{يعني :}$$

$$\begin{aligned}\varphi\bar{\varphi} &= (a\bar{b} + \bar{a}b - \bar{a}\bar{b})(\bar{a}b + a\bar{b} - ab) \\ &= 3|ab|^2 + ((a\bar{b})^2 + (\bar{a}b)^2) - (a^2|b|^2 + b^2|a|^2) \\ &\quad + (\bar{a}^2|b|^2 + \bar{b}^2|a|^2) \\ &= 3|ab|^2 + 1 - ((ab)^2 + (\bar{a}\bar{b})^2) - |ab|^2\end{aligned} \quad \text{و لدينا :}$$

$$(*) \quad \boxed{\varphi\bar{\varphi} = 2|ab|^2 + 1 - ((ab)^2 + (\bar{a}\bar{b})^2)} \quad \text{إذن :}$$

من جهة أخرى لدينا :

$$\begin{aligned}\varphi - \bar{\varphi} &= (a\bar{b} + \bar{a}b - \bar{a}\bar{b}) - (\bar{a}b + a\bar{b} - ab) \\ &= ab - \bar{a}\bar{b}\end{aligned}$$

$$(**) \quad \boxed{\varphi - \bar{\varphi} = ab - \bar{a}\bar{b}} \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned}(\varphi - \bar{\varphi})^2 &= \varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - 2\varphi\bar{\varphi} \\ &= (ab)^2 + (\bar{a}\bar{b})^2 - 2|ab|^2\end{aligned} \quad \text{و منه :}$$

$$\begin{aligned}\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - 2\varphi\bar{\varphi} &= (\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - \varphi\bar{\varphi}) - \varphi\bar{\varphi} \\ &= (ab)^2 + (\bar{a}\bar{b})^2 - 2|ab|^2\end{aligned} \quad \text{يعني :}$$

و منه :

$$\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - |\varphi|^2 = \varphi\bar{\varphi} + ((ab)^2 + (\bar{a}\bar{b})^2 - 2|ab|^2)$$

العنصر المحايد:

ننتقل من الكتابة : $M(a) * M(e) = M(a)$

يعني : $M(\varphi(a, e)) = M(\varphi(a, 1))$

يعني : $\varphi(a, e) = \varphi(a, 1)$

ومنه : $e = 1$

يعني : $M(a) * M(1) = M(a)$

و نشير هنا إلى أن : $M(1) \in (H)$ لأن : $1^2 + \bar{1}^2 - |1|^2 = 1$

و بما أن القانون * تبادلي فإن :

$$M(a) * M(e) = M(e) * M(a) = M(a)$$

إذن $M(1)$ هو العنصر المحايد للقانون * في (H) .

التمثالت: ليكن : $M(a), M(x) \in (H)$

ننتقل من الكتابة : $M(a) * M(x) = M(1)$

يعني : $M(\varphi(a, x)) = M(\varphi(a, \bar{a}))$

يعني : $\varphi(a, x) = \varphi(a, \bar{a})$

و منه : $x = \bar{a}$

بما أن $M(a) \in (H)$ فإن $a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2 = 1$

و منه : $\bar{a}^2 + a^2 - |a|^2 = 1$ يعني : $\overline{a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2} = 1$

و منه : $M(\bar{a}) \in (H)$

وبالتالي : كل عنصر $M(a)$ من (H) يقبل ممثالا $M(\bar{a})$ من (H) بالقانون *.

خلاصة: $((H), *)$ زمرة تبادلية.

التمرين الرابع : (3,0 ن)

■ (1) (أ)

لدينا $\mathcal{F}$ جزء غير فارغ من المجموعة : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\text{لأن : } \mathcal{M}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}$$

و لدينا : $\downarrow$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(a,b) - \mathcal{M}(c,d) &= \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c+d & -d \\ 5d & c-3d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a+b)-(c+d) & -b-(-d) \\ 5b-5d & (a-3b)-(c-3d) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a-c)-(b+d) & -b-d \\ 5(b-d) & (a-c)-3(b+d) \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{M}((a-c), (b-d)) \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

إذن : $(\mathcal{F}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$

$$\begin{aligned} &= c\overline{\varphi(a,b)} + \bar{c}\varphi(a,b) - \bar{c}\overline{\varphi(a,b)} \\ &= c\varphi(\bar{a}, \bar{b}) + \bar{c}\varphi(a,b) - \bar{c}\varphi(\bar{a}, \bar{b}) \\ &= c\varphi(\bar{a}, \bar{b}) + \bar{c}(\varphi(a,b) - \varphi(\bar{a}, \bar{b})) \\ &= c\varphi(\bar{a}, \bar{b}) + \bar{c}(ab - \bar{a}\bar{b}) \\ &= c(\bar{a}b + a\bar{b} - ab) + \bar{c}ab - \bar{a}\bar{b}\bar{c} \\ &= \boxed{\bar{a}bc + ca\bar{b} - abc + \bar{c}ab - \bar{a}\bar{b}\bar{c}} \quad (3) \end{aligned}$$

بنفس الطريقة لدينا :

$$\begin{aligned} M(a) * (M(b) * M(c)) &= M(a) * M(\varphi(b, c)) \\ &= M(\varphi(a, \varphi(b, c))) \\ &= \bar{a}\varphi(b, c) + a\varphi(\bar{b}, \bar{c}) - \bar{a}\varphi(\bar{b}, \bar{c}) \\ &= a\varphi(\bar{b}, \bar{c}) + \bar{a}(\varphi(b, c) - \varphi(\bar{b}, \bar{c})) \\ &= a\varphi(\bar{b}, \bar{c}) + \bar{a}(bc - \bar{b}\bar{c}) \\ &= a(\bar{b}c + b\bar{c} - bc) + \bar{a}bc - \bar{a}\bar{b}\bar{c} \\ (4) \quad &= \boxed{\bar{b}ca + ab\bar{c} - abc + \bar{a}bc - \bar{a}\bar{b}\bar{c}} \end{aligned}$$

من (3) و (4) نستنتج أن :

$$(M(a) * M(b)) * M(c) = M(a) * (M(b) * M(c))$$

و بالتالي : * قانون تجميعي في (H) .

التبادلية :

$$\begin{aligned} \text{في البداية لدينا : } \varphi(a, b) &= a\bar{b} + \bar{a}b - \bar{a}\bar{b} \\ &= b\bar{a} + \bar{b}a - \bar{b}\bar{a} \\ &= \varphi(b, a) \end{aligned}$$

$$(5) \quad \boxed{\varphi(a, b) = \varphi(b, a)} \quad \text{إذن :}$$

ليكن a و b عددين حقيقيين .

$$\begin{aligned} M(a) * M(b) &= M(\varphi(a, b)) \\ &= M(\varphi(b, a)) \\ &= M(b) * M(a) \end{aligned} \quad \text{لدينا :}$$

و بالتالي : * قانون تبادلي في (H)

$$\begin{cases} m_1 = \left(x - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} y\right) \in \mathbb{R} \\ m_2 = \left(\frac{y}{\alpha_2}\right) \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{و منه :}$$

$$(\forall z \in \mathbb{C}), (\exists (m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2) ; z = m_1 + m_2 \alpha \quad \text{يعني :}$$

$$(8) \quad \{1; \alpha\} \text{ أسرة مولدة لـ } \mathbb{C}.$$

لتكن $x + \alpha y = 0$ تأليفة خطية منعدمة لـ 1 و α يعني :

$$\Leftrightarrow x + y(\alpha_1 + i\alpha_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y\alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(9) \quad \{1; \alpha\} \text{ أسرة حرة}$$

من (8) و (9) نستنتج أن $\{1; \alpha\}$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
(3) ■

نضع : $z = x + \alpha y$ بحيث : $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$.

نعتبر التطبيق ψ المعروف بما يلي :

$$\psi : \mathbb{C} \rightarrow F$$

$$z \rightarrow M(a, b)$$

لدينا : $\alpha = 0 + \alpha 1$ إذن : $\psi(\alpha) = M(0, 1) = J$.

$$\begin{aligned} J^2 + 2(I + J) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &+ 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

و منه : $J^2 + 2(I + J) = \Theta$ يعني : $J^2 = -2(I + J)$

■ (3) ب

ليكن z و z' عددين عقديين بحيث : $z = x + \alpha y$ و $z' = c + \alpha d$

لكي يكون ψ تشاكلا يكفي أن يحقق : $\psi(zz') = \psi(z) \times \psi(z')$

يعني : $\psi((x + \alpha y) \times (c + \alpha d)) = \psi(x + \alpha y) \times \psi(c + \alpha d)$

لدينا : $\psi(x + \alpha y) \times \psi(c + \alpha d) = M(x, y) \times M(c, d)$

$$\begin{aligned} &= (xI + yJ) \times (cI + dJ) \\ &= xcI + xdJ + ycJ + ydJ^2 \\ &= xcI + xdJ + ycJ + yd(-2(I + J)) \\ &= (xc - 2yd)I + (xd + yc - 2yd)J \\ &= M((xc - 2yd); (xd + yc - 2yd)) \\ &= \psi((xc - 2yd) + (xd + yc - 2yd)\alpha) \end{aligned}$$

ليكن : $\lambda \in \mathbb{R}$ و $M(a, b) \in F$.

$$\begin{aligned} \lambda M(a, b) &= \lambda \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \lambda b & -\lambda b \\ 5\lambda b & \lambda a - 3\lambda b \end{pmatrix} \\ &= M(\lambda a, \lambda b) \in F \end{aligned}$$

إذن F جزء مستقر بالنسبة للقانون الخارجي (·).

و نعلم أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و F جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

إذن الخاصيات التالية الخاصة بالمجموعة $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ تبقى صالحة للمجموعة F .

و منه :

$$(\forall M, M' \in F), (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) ; \begin{cases} \alpha(M + M') = \alpha M + \alpha M' \\ (\alpha + \beta)M = \alpha M + \beta M \\ (\alpha\beta)M = \alpha(\beta.M) \\ I.M = M \end{cases}$$

إذن : $(F, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

■ (1) ب

يكفي أن تكون الأسرة (I, J) مولدة للفضاء $(F, +, \cdot)$ و أن تكون أسرة حرة.

لدينا : $M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} : (\forall M(a, b) \in F)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow M(a, b) &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b \\ 5b & -3b \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow M(a, b) &= aI + bJ \end{aligned}$$

و منه : الأسرة (I, J) مولدة للفضاء F

ليكن α و β عددين حقيقيين بحيث : $\alpha I + \beta J = 0$.

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta & -\beta \\ 5\beta & \alpha - 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{يعني :}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\beta = 0 \\ 5\beta = 0 \\ \alpha - 3\beta = 0 \end{cases} \quad \text{و منه : } \alpha = \beta = 0$$

إذن الأسرة (I, J) حرة.

و بالتالي (I, J) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي F و بُعْدُه يساوي 2

■ (2)

ليكن α عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$

إذن : $(\exists \alpha_1 \in \mathbb{R}), (\exists \alpha_2 \in \mathbb{R}^*) ; \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$

ليكن $z = x + iy$ عددا عقديا.

نضع : $z = m_1 + m_2 \alpha$

$$\Rightarrow z = m_1 + m_2(\alpha_1 + i\alpha_2)$$

$$\Rightarrow z = m_1 + m_2\alpha_1 + im_2\alpha_2$$

$$\begin{cases} x = m_1 + m_2\alpha_1 \\ y = m_2\alpha_2 \end{cases} \quad \text{بما أن : } z = x + iy \text{ فإن :}$$

$$\frac{6021\pi}{4} = 2 \times 752 \times \pi + \frac{5\pi}{4} \quad \text{و بما أن :}$$

$$\frac{6021\pi}{4} \equiv \frac{5\pi}{4} [2\pi] \quad \text{فإن :}$$

$$\alpha^{2007} = \left[\sqrt{2}^{2007}, \frac{5\pi}{4} \right] \quad \text{و منه :}$$

لنكتب الآن α^{2007} في الأساس $(1, \alpha)$.

$$(*) \quad \alpha^{2007} = x \cdot 1 + y \cdot \alpha \quad \text{ليكن } x \text{ و } y \text{ عددين حقيقيين بحيث :}$$

هدفنا هو تحديد x و y

$$\begin{aligned} x + \alpha y &= [x, 0] + \left[\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \times [y, 0] \quad \text{لدينا :} \\ &= [x, 0] + \left[\sqrt{2}y, \frac{3\pi}{4} \right] \end{aligned}$$

إذن بالإستعانة بالمتساوية $(*)$ نحصل على :

$$\left[\sqrt{2}^{2007}, \frac{5\pi}{4} \right] = [x, 0] + \left[\sqrt{2}y, \frac{3\pi}{4} \right]$$

و منه : الجزءان الحقيقيان لطرفي هذه المتساوية متساويان. و الجزءان التخيليان متساويان كذلك. و من ثم نحصل على النظمة $(\mathcal{S})$ التالية :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} \sqrt{2}^{2007} \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = x + \sqrt{2}y \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ \sqrt{2}^{2007} \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}y \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \quad \text{لدينا :}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \quad \text{و لدينا كذلك :}$$

إذن النظمة $(\mathcal{S})$ تصبح :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} \sqrt{2}^{2007} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right) = x + \sqrt{2}y \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right) \\ \sqrt{2}^{2007} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}y \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{cases}$$

$$y = -2^{1003} \quad \text{من المعادلة الثانية نستنتج أن :}$$

و لدينا حسب المعادلة الأولى :

$$x = -2^{1003} - (2^{1003} \times 2^0) = -2^{1004}$$

$$\alpha^{2007} = (-2^{1003}) + (-2^{1004})\alpha \quad \text{و بالتالي :}$$

$$| = \psi((xc - 2yd) + (xd + yc - 2yd)\alpha)$$

لكي يكون ψ تشاكلا تقابليا يكفي أن يحقق :

$$\begin{aligned} \psi((xc - 2yd) + (xd + yc - 2yd)\alpha) \\ = \psi(xc + \alpha xd + \alpha yc + \alpha^2 yd) \end{aligned}$$

$$(xc - 2yd) + (xd + yc - 2yd)\alpha \quad \text{يعني :}$$

$$= xc + \alpha xd + \alpha yc + \alpha^2 yd$$

نرتب جيدا هذه المتساوية نحصل على :

$$(yd)\alpha^2 + (2yd)\alpha + (2yd) = 0$$

$$\alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0 \quad \text{يعني :}$$

نحل هذه المعادلة بالطريقة التقليدية نجد :

$$\alpha = -1 - i \quad \text{أو} \quad \alpha = -1 + i$$

و نشير كذلك إلى أن لكل عنصر $\mathcal{M}(x, y)$ يوجد عدد عقدي وحيد

$$\varphi(z) = \mathcal{M}(x, y) \quad \text{بحيث } z = x + y\alpha$$

و ذلك لأن $(1, \alpha)$ أساس للفضاء المتجهي العقدي $\mathbb{C}$

أو بتعبير آخر : كل عنصر z من $\mathbb{C}$ يكتب بطريقة

وحيدة على شكل تاليفة خطية للعددين 1 و α .

خلاصة : من أجل $\alpha = i - 1$ أو $\alpha = -1 - i$

$$\psi \text{ تشاكل تقابلي من } (\mathbb{C}, \times) \text{ نحو } (\mathcal{F}, \times) \quad \text{لدينا}$$

■ (4)

$$\alpha = -1 + i \quad \text{نأخذ :}$$

$$\alpha = \sqrt{2} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) \quad \text{لدينا :}$$

$$= \sqrt{2} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$$

$$= \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i} = \left[\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \right]$$

ومنه : حسب (Moivre)

$$\alpha^{2007} = \left[\sqrt{2}^{2007}, \frac{2007 \times 3\pi}{4} \right]$$

$$= \left[\sqrt{2}^{2007}, \frac{6021\pi}{4} \right]$$

■ (I) 2 (i)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

■ (I) 2 (ii)

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{g(x)} \right)' = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{-(1 + e^{-x})^2}{(1 + x - e^{-x})^2}$$

■ (I) 2 (iii)

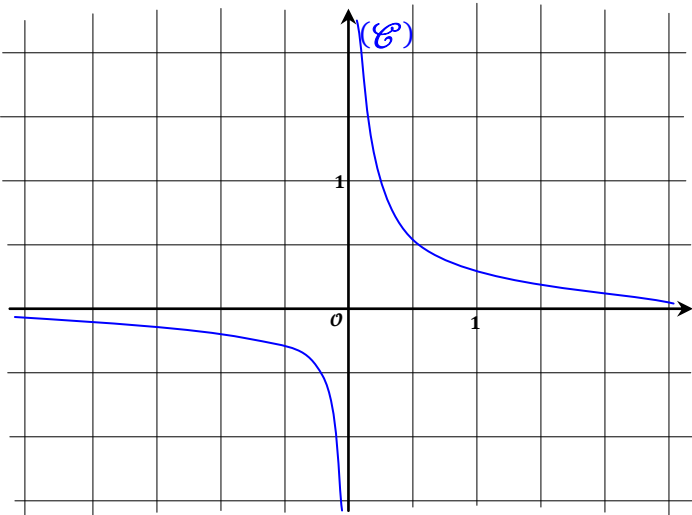
لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) < 0$

إذن : f دالة تناقصية على $\mathbb{R}^*$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
f	0	$+\infty$	0

■ (I) 2 (iv)



بعد حصولنا على هذه الصيغة الثمينة تصبح التتمة سهلة و في المتناول

لدينا : $J^{2007} = J \times J \times J \times \dots \times J$

$$= \psi(\alpha) \times \psi(\alpha) \times \psi(\alpha) \times \dots \times \psi(\alpha)$$

$$= \psi(\alpha \times \alpha \times \alpha \times \dots \times \alpha)$$

$$= \psi(\alpha^{2007})$$

$$= \psi((-2^{1003}) + (-2^{1004})\alpha)$$

$$= \mathcal{M}((-2^{1003}); (-2^{1004}))$$

$$= (-2^{1003})I + (-2^{1004})J$$

و بالتالي : $J^{2007} = (-2^{1003})I + (-2^{1004})J$

التمرين الخامس : (9,0 ن)

■ (I) 1 (i)

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 1 + e^{-x} > 0 \quad \text{لدينا}$$

إذن : g دالة تزايدية قطعيا على $\mathbb{R}$.

■ (I) 1 (ii)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x - e^{-x}) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x - e^{-x}) = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+
g	$-\infty$	0	$+\infty$

■ (I) 1 (iii)

لدينا g دالة متصلة و تزايدية قطعيا على $\mathbb{R}$ إذن فهي تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $g(\mathbb{R})$.

$$\text{و لدينا : } g(\mathbb{R}) = g(]-\infty, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[=]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$$

لدينا : $0 \in \mathbb{R}$ إذن يوجد عدد وحيد x_0 من $\mathbb{R}$ بحيث : $g(x_0) = 0$

و لدينا حسب جدول تغيرات الدالة g : $g(0) = 0$

إذن : 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$.

و هذا يتناقض مع كون $\ell > 0$

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x_n) = 0 \quad \text{و بالتالي}$$

■ (II) 1 (أ)

ننطلق من الكتابة : $f(x) = 1$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{1}{1+x-e^{-x}} &= 1 \\ \Leftrightarrow 1+x-e^{-x} &= 1 \\ \Leftrightarrow e^{-x} &= x \end{aligned}$$

■ (II) 1 (ب)

نضع : $\varphi(x) = e^{-x} - x$

لدينا دالة متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها فرق دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$.

و منه : φ متصلة على المجال $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.

$$\varphi\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\left(\frac{-1}{e}\right)} - \frac{1}{e} = \frac{1}{e^{\left(\frac{1}{e}\right)}} - \frac{1}{e} \quad \text{و لدينا}$$

$$\varphi(1) = e^{-1} - 1 \quad \text{و}$$

لنحدد الآن إشارة كل من $\varphi\left(\frac{1}{e}\right)$ و $\varphi(1)$

لدينا : $-1 < 0$ إذن $e^{-1} < 1$ يعني : $e^{-1} - 1 < 0$

$$(1) \quad \varphi(1) < 0 \quad \text{و منه}$$

و لدينا $e > 1$ إذن $\frac{1}{e} < 1$

$$\frac{1}{e^{\left(\frac{1}{e}\right)}} > \frac{1}{e} \quad \text{يعني : } e^{\left(\frac{1}{e}\right)} < e \quad \text{و منه}$$

$$(2) \quad \varphi\left(\frac{1}{e}\right) > 0 \quad \text{إذن}$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $\varphi(1) \times \varphi\left(\frac{1}{e}\right) < 0$

و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطة : $\left(\exists \alpha \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]\right) : \varphi(\alpha) = 0$

$$\left(\exists \alpha \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]\right) : e^{-\alpha} = \alpha \quad \text{أو بتعبير آخر}$$

■ (I) 3 (أ)

نضع : $h(x) = f(x) - n$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) - n) = +\infty \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - n) = -n \quad \text{و}$$

و لدينا h دالة تناقصية قطعاً على $\mathbb{R}_+^*$ لأن : $h'(x) = f'(x) < 0$

و بما أن f متصلة و تناقصية على $\mathbb{R}_+^*$.

فإن : h متصلة و تناقصية على $\mathbb{R}_+^*$.

و منه : h تقابل من $]0, +\infty[$ نحو $]-n, +\infty[$

و بالتالي : $(\exists ! x_n \in \mathbb{R}_+^*) ; h(x_n) = 0$

$$(*) \quad \left(\exists ! x_n \in \mathbb{R}_+^* ; f(x_n) = n\right) \quad \text{أي}$$

■ (I) 3 (ب)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

لدينا : $n > n+1$ و منه حسب (*) : $f(x_{n+1}) > f(x_n)$

و بما أن f دالة تناقصية فإن : $x_{n+1} < x_n$

و منه : x_n متتالية تناقصية

و بما أنها مصغورة بالعدد 0 يعني : $x_n > 0$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

فإنها متقاربة .

■ (I) 3 (ج)

لدينا حسب السؤال : (3) (أ) $f(x_n) = n$

$$\frac{1}{1+x_n-e^{-x_n}} = n \quad \text{يعني}$$

$$(1+x_n-e^{-x_n}) = \frac{1}{n} \quad \text{يعني}$$

نجعل n يؤول إلى $(+\infty)$ نحصل على :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+x_n-e^{-x_n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(1+\ell) = e^{-\ell} \quad \text{يعني} \quad 1+\ell-e^{-\ell} = 0$$

سنبرهن الآن بالخلف على أن : $\ell \neq 0$

نفترض إذن أن : $\ell > 0$.

$$1+\ell > 0 \quad \text{و} \quad e^{-\ell} < 1$$

بما أن : $(1+\ell) = e^{-\ell}$ فإن : $0 < (1+\ell) < 1$.

$$-1 < \ell < 0 \quad \text{يعني}$$

■ (II) 2 (أ)

لنبرهن على أن : $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

من أجل $n = 1$ لدينا $\frac{1}{e} \leq y_1 = 1 \leq 1$.

نفترض أن : $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

إذن : $-1 \leq -y_n \leq -\frac{1}{e}$ و منه : $e^{-1} \leq e^{-y_n} \leq e^{-\frac{1}{e}}$

إذن : $\frac{1}{e} \leq y_{n+1} \leq \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$ (3)

ولدينا $\frac{1}{e} > 0$ إذن $e^{\frac{1}{e}} > 1$

و منه : $\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}} < 1$ (4)

من (3) و (4) نستنتج أن : $\frac{1}{e} \leq y_{n+1} \leq 1$

و بالتالي حسب مبدأ التراجع : $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

■ (II) 2 (ب)

نضع : $\varphi(x) = e^{-x}$.

لدينا φ دالة متصلة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن φ متصلة وقابلة للإشتقاق على $\overrightarrow{[\alpha, y_n]}$

لأن : $\overrightarrow{[\alpha, y_n]} \subset \mathbb{R}$

و منه حسب مبرهنة التزايد المتناهية :

$$(\exists! c \in \overrightarrow{[\alpha, y_n]}) : \frac{|\varphi(y_n) - \varphi(\alpha)|}{|y_n - \alpha|} = |\varphi'(c)|$$

و منه : $(\exists! c \in \overrightarrow{[\alpha, y_n]}) : |y_{n+1} - \alpha| = |\varphi'(c)| |y_n - \alpha|$ (*)

لقد أدخلت الرمز $\overrightarrow{[\alpha, y_n]}$ لأننا لا نعلم من الأكبر هل α أم y_n

لدينا حسب السؤالين 1 (ب) و 2 (أ) : $\frac{1}{e} \leq \alpha \leq 1$ و $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$

بما أن : $c \in \overrightarrow{[\alpha, y_n]}$ فإن $\frac{1}{e} \leq c \leq 1$

و منه : $-e^{-\frac{1}{e}} \leq -e^{-c} \leq -e^{-1}$ (5)

نعلم أن العدد الموجب يكون دائما أكبر من العدد السالب .

إذن : $-e^{-1} < e^{-\frac{1}{e}}$ (6)

من (5) و (6) نستنتج أن : $-e^{-\frac{1}{e}} \leq -e^{-c} \leq e^{-\frac{1}{e}}$

يعني : $|\varphi'(c)| < e^{-\frac{1}{e}}$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $|y_n - \alpha|$ نحصل على :

$$|y_n - \alpha| |\varphi'(c)| < e^{-\frac{1}{e}} |y_n - \alpha|$$

و منه حسب النتيجة (*) :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : |y_{n+1} - \alpha| \leq e^{-\frac{1}{e}} |y_n - \alpha|$$

■ (II) 2 (ج)

انطلاقا من النتيجة (**) نستنتج أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : |y_n - \alpha| \leq e^{-\frac{1}{e}} |y_{n-1} - \alpha|$$

و ذلك بتعويض $n \rightarrow n-1$

$$|y_n - \alpha| \leq e^{-\frac{1}{e}} |y_{n-1} - \alpha|$$

$$\leq e^{-\frac{1}{e}} e^{-\frac{1}{e}} |y_{n-2} - \alpha|$$

$$\leq \left(e^{-\frac{1}{e}}\right)^3 |y_{n-3} - \alpha|$$

$$\leq \left(e^{-\frac{1}{e}}\right)^4 |y_{n-4} - \alpha|$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\leq \left(e^{-\frac{1}{e}}\right)^{n-1} |y_{n-(n-1)} - \alpha|$$

$$|y_n - \alpha| \leq \left(e^{-\frac{1}{e}}\right)^{n-1} |y_1 - \alpha|$$

$$|y_n - \alpha| \leq \left(e^{-\frac{1}{e}}\right)^{n-1} |1 - \alpha|$$

لنحسب الآن نهاية المتتالية : $\left(\left(e^{-\frac{1}{e}}\right)^{n-1} |1 - \alpha|\right)$

نعلم أن $\frac{1}{e} > 0$ إذن : $\frac{-1}{e} < 0$ و منه : $e^{\frac{-1}{e}} < 1$

إذن $\left(e^{\frac{-1}{e}}\right)^{n-1}$ متتالية هندسية أساسها محصور بين 1 و -1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{-1}{e}}\right)^{n-1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{-1}{e}}\right)^{n-1} |1 - \alpha| = 0$$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{x}+1}\right) = \ln(2)$

فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ln(2)$

■ (III) ② i

ليكن t عددا حقيقيا موجبا .

نضع :
$$\begin{cases} \varphi(t) = 1 - t \\ \psi(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} \\ h(t) = e^{-t} \end{cases}$$

إذن :
$$\begin{cases} \varphi'(t) = -1 \\ \psi'(t) = t - 1 \\ h'(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

لدينا $t \geq 0$ إذن $-t \leq 0$

و منه : $-e^{-t} \leq -1$ يعني : $h'(t) \leq \varphi'(t)$

و بما أن $h(0) = \varphi(0) = 1$

فإن : $(\forall t \in [0, +\infty[) : h(t) \leq \varphi(t)$

إذن : $(\forall t \in [0, +\infty[) : e^{-t} \leq 1 - t$ (1)

من النتيجة (1) نستخلص : $-e^{-t} \geq t - 1$

إذن : $h'(t) \geq \psi'(t)$

و بما أن : $h(0) = \psi(0) = 1$ فإن : $h(t) \geq \psi(t)$

يعني : $(\forall t \in [0, +\infty[) : e^{-t} \geq 1 - t + \frac{t^2}{2}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن :

$(\forall t \geq 0) : \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right) \geq e^{-t} \geq (1 - t)$

■ (III) ② ب

لدينا : $(\forall t \geq 0) ; 1 - t \leq e^{-t}$

$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; t - 1 \geq -e^{-t}$

$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; (t + 1) + (t - 1) \geq (t + 1) - e^{-t}$

$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; 2t \geq t + 1 - e^{-t}$

و بما أن : $|y_n - \alpha| \leq \underbrace{\left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}}\right)}_{\text{tend vers } 0} |1 - \alpha|$

فإن : $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - \alpha| = 0$ يعني : $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \alpha$

و بالتالي : $(y_n)_{n \geq 1}$ متتالية متقاربة و نهايتها هي α .

■ (III) ① i

ليكن $t > 0$ إذن : $e^{-t} < 1$

يعني : $-e^{-t} > -1$

$\Rightarrow (t + 1) - e^{-t} > (t + 1) - 1$

$\Rightarrow t + 1 - e^{-t} > t$

$\Rightarrow \frac{1}{t + 1 - e^{-t}} < \frac{1}{t}$

$\Rightarrow f(t) < \frac{1}{t}$ (1)

و لدينا كذلك : $-e^{-t} < 0$

$\Rightarrow (t + 1) - e^{-t} < (t + 1)$

$\Rightarrow \frac{1}{t + 1 - e^{-t}} > \frac{1}{t + 1}$

$\Rightarrow f(t) > \frac{1}{t + 1}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن :

$(\forall t > 0) : \frac{1}{t + 1} < f(t) < \frac{1}{t}$

■ (III) ① ب

ليكن : $x > 0$

لدينا حسب السؤال ① : $(\forall t > 0) : \frac{1}{t + 1} < f(t) < \frac{1}{t}$

ندخل التكامل على هذا التأطير نحصل على :

$\int_x^{2x} \left(\frac{1}{t + 1}\right) dt < \int_x^{2x} f(t) dt < \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t}\right) dt$

$\Rightarrow [\ln(1 + t)]_x^{2x} < F(x) < [\ln(t)]_x^{2x}$

$\Rightarrow \ln(1 + 2x) - \ln(1 + x) < F(x) < \ln(2x) - \ln(x)$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{1 + 2x}{1 + x}\right) < F(x) < \ln(2)$

■ (III) ③ (i)

لدينا f دالة متصلة على $\mathbb{R}^*$ إذن فهي تقبل دالة أصلية نرمز لها بـ $\mathcal{T}$
بحيث : $\mathcal{T}'(x) = f(x)$.

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt = [\mathcal{T}(t)]_x^{2x} = \mathcal{T}(2x) - \mathcal{T}(x) \quad \text{لدينا :}$$

بما أن : $x \rightarrow 2x$ و $x \rightarrow \mathcal{T}(x)$ دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$
فإن : $x \rightarrow \mathcal{T}(2x) - \mathcal{T}(x)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.
ولدينا : $F'(x) = 2\mathcal{T}'(x) - \mathcal{T}'(x)$.

$$= 2f(2x) - f(x)$$

$$= \frac{2}{g(2x)} - \frac{1}{g(x)}$$

$$= \frac{2g(x) - g(2x)}{g(2x)g(x)}$$

$$= \frac{2(1+x-e^{-x}) - (1+2x-e^{-2x})}{g(2x)g(x)}$$

$$= \frac{(1-2e^{-x}+e^{-2x})}{g(2x)g(x)}$$

$$= \frac{(e^{2x} - 2e^x + 1)}{e^{2x}g(2x)g(x)}$$

$$= \frac{(e^x - 1)^2}{e^{2x}g(2x)g(x)}$$

■ (III) ③ (b)

بما أن : $g(x) > 0$ و $g(2x) > 0$: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$

وبما أن : $(e^x - 1)^2 \geq 0$ و $e^{2x} > 0$: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$

فإن : $F'(x) \geq 0$

و بالتالي : F تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}_+^*$

■ والحمد لله رب العالمين ■

$$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; \frac{1}{2t} \leq \frac{1}{t+1-e^{-t}}$$

$$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; \frac{1}{2t} \leq f(t) \quad (*)$$

ولدينا كذلك : $(\forall t \geq 0) : \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right) \geq e^{-t}$

$$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; -e^{-t} \geq -1 + t - \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; (1+t) - e^{-t} \geq (1+t) - 1 + t - \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; (1+t) - e^{-t} \geq 2t - \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; (1+t) - e^{-t} \geq \frac{4t - t^2}{2}$$

$$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; \frac{1}{1+t-e^{-t}} \leq \frac{2}{4t-t^2}$$

$$\Rightarrow (\forall t \geq 0) ; f(t) \leq \frac{2}{4t-t^2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right) = \frac{2}{4t-t^2} \quad \text{ولدينا :}$$

$$(**) \quad (\forall t \geq 0) ; f(t) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right) \quad \text{إذن :}$$

من (*) و (**) نستنتج أن :

$$(\forall t \geq 0) ; \frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right)$$

■ (III) ② (c)

ننطلق من نتيجة السؤال (b) :

$$\frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right) \quad \text{لدينا :}$$

$$\Rightarrow \int_x^{2x} \frac{1}{2t} dt \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \frac{1}{2} \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right) dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [\ln t]_x^{2x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2} [\ln t]_x^{2x} + \frac{1}{2} [\ln(4-t)]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln 2}{2} \leq F(x) \leq \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4-2x}{4-x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{4-2x}{4-x} \right) = 0 \quad \text{و بما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{\ln 2}{2} \quad \text{فإن :}$$

و بالتالي F متصلة على يمين الصفر.