

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الانجاز : أربع ساعات

المملكة المغربية



وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والإمتحانات

الامتحانات الوطنية الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة الاستدراكية 2007

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,0 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظام (S) التالية : $\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$ بحيث : $\begin{cases} a, b, p, q \in \mathbb{Z} \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$

① 0,50 ن (أ) بين أنه يوجد زوج (u_0, v_0) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $pu_0 + qv_0 = 1$.

② 0,50 ن (ب) بين أن $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ حل للنظمة (S).

③ 0,50 ن (2) ليكن x حلا للنظمة (S)، بين أن العدد pq يقسم العدد $x - x_0$.

④ 0,50 ن (3) ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث : pq يقسم العدد $x - x_0$. بين أن x حل للنظمة (S).

⑤ 0,50 ن (4) استنتج مجموعة حلول النظمة (S).

⑥ 0,50 ن (5) حل في $\mathbb{Z}$ النظام التالية : $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$

التمرين الثاني : (2,0 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا أكبر أو يساوي 3. تتوفر على n صندوقا مرقما من 1 إلى n . الصندوق رقم k بحيث : $(1 \leq k \leq n)$ يحتوي على k كرة بيضاء و $(n - k)$ كرة سوداء.

نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق ثم نسحب منه كرة واحدة.

① 0,50 ن (1) أحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء.

② 0,75 ن (2) أحسب احتمال أن يتم السحب من صندوق رقمه فردي.

③ 0,75 ن (3) أحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء، علما أن السحب تم من صندوق رقمه عدد فردي.

التمرين الثالث : (2,0 ن)

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر المجموعة : $(\mathcal{H}) = \{M(z) \in (P) / z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1\}$

① 0,25 ن (أ) حدد معادلة ديكارتية للمجموعة $(\mathcal{H})$.

② 0,50 ن (ب) بين أن $(\mathcal{H})$ هذلول و حدد مركزه و رأسيه و مقاربيه في المعلم $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

③ 0,25 ن (ج) أنشئ $(\mathcal{H})$.

④ 0,50 ن (2) $M(a)$ و $M(b)$ نقطتان من $(\mathcal{H})$. نضع : $\varphi(a, b) = a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}$.

⑤ 0,50 ن (أ) بين أن : $M(\varphi(a, b)) \in (\mathcal{H})$

⑥ 0,50 ن (ب) تحقق أن $\varphi(a, 1) = 1$ و أن $\varphi(a, \bar{a}) = 1$.

⑦ 1,00 ن (3) نزود $(\mathcal{H})$ بقانون التركيب الداخلي (*) حيث لكل $M(a)$ و $M(b)$ من $(\mathcal{H})$: $M(a) * M(b) = M(\varphi(a, b))$.

بين أن : $((\mathcal{H}), *)$ زمرة تبادلية.

التمرين الرابع : (3,0 ن)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2. نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathcal{M}(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad \text{نعتبر المجموعة التالية :}$$

و هي مزودة بجمع المصفوفات (+) و ضرب مصفوفة في عدد حقيقي ($\cdot$) و ضرب المصفوفات ($\times$) .

$$\text{نضع : } I = \mathcal{M}(1, 0) \text{ و } J = \mathcal{M}(0, 1) \text{ و } O = \mathcal{M}(0, 0)$$

① أ) بين أن : $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

0,50 ن

ب) بين أن (I, J) أساس للفضاء المتجهي $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ و اعط بعده .

0,50 ن

② ليكن α عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$ ، بين أن الأسرة $(1, \alpha)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

0,50 ن

③ نعتبر التطبيق ψ من $\mathbb{C}$ نحو $\mathcal{F}$ المعرف بما يلي : $\psi(z) = \mathcal{M}(m, n)$

بحيث : $z = m + \alpha n$ و $m \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{R}$ و $z \in \mathbb{C}$.

أ) تحقق أن $J^2 = -2(I + J)$ و $\psi(\alpha) = J$

0,50 ن

ب) حدد قيمتي α التي يكون من أجلها التطبيق ψ تشاكلا تقابليا من $(\mathbb{C}, \times)$ نحو $(\mathcal{F}, \times)$.

0,50 ن

④ نأخذ : $\alpha = -1 + i$. أكتب في الأساس (I, J) المصفوفة J^{2007} .

0,50 ن

التمرين الخامس : (9,0 ن)

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = 1 + x - e^{-x}$

① أ) أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

0,50 ن

ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة g .

0,50 ن

ج) استنتج أن $x_0 = 0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$.

0,50 ن

② لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f(x) = \frac{1}{1+x-e^{-x}}$

0,50 ن

$(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

أ) أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

0,50 ن

ب) أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$.

0,25 ن

ج) ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,50 ن

د) أنشئ $(\mathcal{C})$.

0,50 ن

③ أ) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ ، بين أن المعادلة $f(x) = n$ تقبل حلا وحيدا x_n في المجال $]0, +\infty[$.

0,50 ن

ب) بين أن المتتالية $(x_n)_{n \geq 1}$ تناقصية و أنها متقاربة .

0,50 ن

ج) أثبت أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

0,50 ن

(II) ① (أ) بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تكافئ المعادلة $e^x = x$	0,25 ن
(ب) بين أن المعادلة $e^x = x$ تقبل حلا وحيدا هو $\alpha = x_1$ بحيث : $\frac{1}{e} \leq \alpha \leq 1$	0,50 ن
② تعتبر المتتالية $(y_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي $y_1 = 1$ و $y_{n+1} = e^{-y_n}$: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$	
① (أ) بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$	0,50 ن
(ب) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : y_{n+1} - \alpha \leq e^{-\left(\frac{1}{e}\right)} y_n - \alpha$	0,50 ن
③ (ج) استنتج أن : $(y_n)_{n \geq 1}$ متقاربة محددا نهايتها .	0,50 ن
(III) لتكن $\mathcal{F}$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي : $(\forall x > 0) : \mathcal{F}(x) = \int_x^{2x} f(t) dt \quad \text{و} \quad \mathcal{F}(0) = \frac{1}{2} \ln 2$	
① (أ) بين أن : $(\forall t > 0) : \frac{1}{1+t} < f(t) < \frac{1}{t}$ ———	0,25 ن
(ب) استنتج النهاية التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(x)$	0,50 ن
② (أ) بين أن : $(\forall t \geq 0) : 1 - t \leq e^{-1} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$ ———	0,50 ن
(ب) بين أن لكل t من المجال $]0,4[$: $\frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right)$	0,50 ن
③ (ج) استنتج أن $\mathcal{F}$ متصلة على اليمين في 0	0,25 ن
③ (أ) بين أن $\mathcal{F}$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و أحسب $\mathcal{F}'(x)$ من أجل $x > 0$.	0,50 ن
(ب) أدرس تغيرات الدالة $\mathcal{F}$ على $\mathbb{R}_+$.	0,25 ن