

التمرين الأول : (3,0 ن)

■ (I) ①

ليكن الزوج (a, b) عنصرا من E^2 .

$$\text{لدينا : } \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(b\sqrt{2} - 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(ab\sqrt{2} - a - b + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= a + b - ab\sqrt{2}$$

$$= a \perp b$$

■ (I) ②

يكفي أن نبين أن : $\forall (a, b) \in E^2 ; a \perp b \in E$

ليكن الزوج (a, b) عنصرا من E^2 .

$$\text{يعني : } a \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ و } b \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ومنه : } a\sqrt{2} - 1 \neq 0 \text{ و } b\sqrt{2} - 1 \neq 0$$

$$\text{ومنه : } (a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1) \neq 0$$

$$\text{ومنه : } \frac{-1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1) \neq 0$$

$$\text{إذن : } \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1) \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{إذن : } a \perp b \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{أي : } a \perp b \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$\text{أي : } a \perp b \in E$$

و بالتالي $\perp$ قانون تركيب داخلي في E .

■ (I) ②

لكي تكون $(E, \perp)$ زمرة تبادلية يكفي أن يكون $\perp$ تبادليا و تجميعيا و أن يقبل عنصرا محايدا في E وأن يقبل كل عنصر من E ممثلا من E .

ليكن الزوج (a, b) عنصرا من E^2 .

$$a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1)$$

$$\Leftrightarrow a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(b\sqrt{2} - 1)(a\sqrt{2} - 1)$$

$$\Leftrightarrow a \perp b = b \perp a$$

و منه : $\perp$ تبادلي في E .

ليكن e العنصر المحايد للقانون $\perp$ في E

$$\text{يعني : } (\forall x \in E) ; x \perp e = e \perp x = x$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in E) ; x + e - xe\sqrt{2} = x$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in E) ; e(1 - x\sqrt{2}) = 0$$

$$\text{و بما أن : } x \in E \text{ فإن : } x \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{يعني : } 1 - x\sqrt{2} \text{ و بالتالي : } e = 0$$

و بما أن : $0 \in E$ فإن 0 هو العنصر المحايد للقانون $\perp$ في E .

ليكن x عنصرا من E .

و ليكن y ممثلا x في E بالنسبة $\perp$

$$x \perp y = y \perp x = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y - xy\sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow y(1 - x\sqrt{2}) = -x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-x}{(1 - x\sqrt{2})} = \frac{x}{(x\sqrt{2} - 1)}$$

$$\text{و للتأكد من أن : } \frac{x}{(x\sqrt{2} - 1)} \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{نفترض التساوي إذن : } x\sqrt{2} = x\sqrt{2} - 1$$

$$\text{و منه : } 0 = -1 \text{ وهذا تناقض واضح.}$$

$$\text{و من تم فإن : } \frac{x}{(x\sqrt{2} - 1)} \in E$$

$$\text{يعني أن كل عنصر } x \text{ من } E \text{ يقبل ممثلا و هو : } \frac{x}{(x\sqrt{2} - 1)}$$

من E بالنسبة للقانون $\perp$

خلاصة : $(E, \perp)$ زمرة تبادلية.

■ (II) ①

$$\text{لدينا : } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{إذن : } A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A^2 = -2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2A$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \varphi(a) \times \varphi(b) &= I + \frac{b}{\sqrt{2}}A + \frac{a}{\sqrt{2}}A + \frac{ab}{2}A^2 \\ \Leftrightarrow \varphi(a) \times \varphi(b) &= I + \frac{b}{\sqrt{2}}A + \frac{a}{\sqrt{2}}A - \frac{ab}{2}A \\ \Leftrightarrow \varphi(a) \times \varphi(b) &= I + \frac{(a+b-ab)}{\sqrt{2}}A \\ \Leftrightarrow \varphi(a) \times \varphi(b) &= M(a \perp b) \\ \Leftrightarrow \varphi(a) \times \varphi(b) &= \varphi(a \perp b) \end{aligned}$$

لتكن S مصفوفة من F . إذن حسب تعريف المجموعة F :

$$(\exists a \in E) ; S = M(a)$$

و منه حسب تعريف التطبيق φ : $S = \varphi(a)$; $(\exists a \in E)$

و بالتالي φ تطبيق شمولي من $(E, \perp)$ نحو $(F, \times)$

ليكن a و b عنصرين من E بحيث : $\varphi(a) = \varphi(b)$

إذن حسب تعريف التطبيق φ : $M(a) = M(b)$

$$\left(I + \frac{a}{\sqrt{2}}A\right) = \left(I + \frac{b}{\sqrt{2}}A\right) \quad \text{يعني :}$$

$$a = b \quad \text{و منه :}$$

و بالتالي φ تطبيق تبائي من $(E, \perp)$ نحو $(F, \times)$

خلاصة : φ تشاكل تقابلي من $(E, \perp)$ نحو $(F, \times)$.

■ (II) ② ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

و بما أن $(E, \perp)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\perp$ هو 0 و كل

$$\text{عنصر } x \text{ من } E \text{ يقبل ماثلا } \left(\frac{x}{x\sqrt{2}-1}\right)$$

فإن $(F, \times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\times$ هو

$$\varphi(0) \text{ و كل عنصر } y \text{ من } F \text{ يقبل ماثلا } \left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)$$

$$\varphi(0) = I + \frac{0}{\sqrt{2}}A = I \quad \text{و لدينا :}$$

$$\varphi\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right) = I + \frac{y}{\sqrt{2}(y\sqrt{2}-1)}A = I + \frac{y}{2y-\sqrt{2}}A$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-y}{\sqrt{2}-2y} & \frac{y}{2y-\sqrt{2}} \\ \frac{y}{2y-\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}-y}{\sqrt{2}-2y} \end{pmatrix} = M\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)$$

$$\text{و لدينا كذلك : } M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-a & a \\ a & \sqrt{2}-a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{a}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M(a) = I + \frac{a}{\sqrt{2}}A$$

■ (II) ① ب

يكفي أن نبين أن :

$$(\forall M(a) \in F), (\forall M(b) \in F) ; M(a) \times M(b) \in F$$

في البداية نلاحظ أن $M(a)$ مصفوفة مربعة من الرتبة 2 و ذات معاملات حقيقية

إذن المجموعة F جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

ليكن $M(a)$ و $M(b)$ عنصرين من F بحيث : $(a, b) \in E^2$

$$\text{لدينا : } M(a) \times M(b) = \left(I + \frac{a}{\sqrt{2}}A\right) \left(I + \frac{b}{\sqrt{2}}A\right)$$

$$\Leftrightarrow M(a) \times M(b) = I + \frac{b}{\sqrt{2}}A + \frac{a}{\sqrt{2}}A + \frac{ab}{2}A^2$$

$$\Leftrightarrow M(a) \times M(b) = I + \frac{b}{\sqrt{2}}A + \frac{a}{\sqrt{2}}A - \frac{ab}{2}A$$

$$\Leftrightarrow M(a) \times M(b) = I + \frac{(a+b-ab)}{\sqrt{2}}A$$

$$\Leftrightarrow M(a) \times M(b) = M(a \perp b)$$

لكي تكون المصفوفة $M(a \perp b)$ عنصرا من F يكفي أن يكون $a \perp b$ عنصرا من E

و بالفعل $a \perp b \in E$ لأن قانون تركيب داخلي في E و $a \in E$ و $b \in E$.

إذن نحصل على : $M(a) \times M(b) \in F$

و بالتالي F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

■ (II) ② ا

لكي يكون التطبيق φ تشاكلا من $(E, \perp)$ نحو $(F, \times)$ يكفي أن نتأكد من

$$\forall (a, b) \in E^2 ; \varphi(a) \times \varphi(b) = \varphi(a \perp b)$$

و لكي يكون التطبيق φ تقابلا يكفي أن يكون شموليا و تبائيا .

ليكن a و b عنصرين من E .

$$\Leftrightarrow \varphi(a) \times \varphi(b) = M(a) \times M(b)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(a) \times \varphi(b) = \left(I + \frac{a}{\sqrt{2}}A\right) \left(I + \frac{b}{\sqrt{2}}A\right)$$

و للتأكد :

$$\begin{aligned}
 M(y) \times M\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right) &= \left(I + \frac{y}{\sqrt{2}}A\right)\left(I + \frac{y}{2y-\sqrt{2}}A\right) \\
 &= I + \frac{y}{\sqrt{2}}A + \frac{y}{2y-\sqrt{2}}A + \frac{y^2}{\sqrt{2}(2y-\sqrt{2})}A^2 \\
 &= I + \frac{y}{\sqrt{2}}A + \frac{y}{\sqrt{2}(\sqrt{2}y-1)}A - \frac{2y^2}{2(\sqrt{2}y-1)}A \\
 &= I + \left(\frac{2(\sqrt{2}y-1)y + 2y - 2\sqrt{2}y^2}{2(\sqrt{2}y-1)\sqrt{2}}\right)A \\
 &= I + \left(\frac{2\sqrt{2}y^2 - 2y + 2y - 2\sqrt{2}y^2}{2(\sqrt{2}y-1)\sqrt{2}}\right)A \\
 &= I + 0 \\
 &= I
 \end{aligned}$$

التمرين الثاني : (3,5 ن)

■ (I) ① (I) ①

يكفي أن نبين أن :

$$(a+i)^2 - (1+a)(1+i)(a+i) + i(1+a^2) = 0$$

و للوصول إلى ذلك ننشر أو نعمل. نختار تقنية التعميل.

$$\begin{aligned}
 (a+i)^2 + i(1+a^2) &= (a+i)^2 + i(a^2 - i^2) \\
 &= (a+i)(a+i) + i(a-i)(a+i) \\
 &= (a+i)(a+i) + (ai+1)(a+i) \\
 &= (a+i)(a+i+ai+1) \\
 &= (a+i)(a+1)(i+1)
 \end{aligned}$$

و منه : $(a+i)$ حل للمعادلة (E) .

■ (I) ① (I) ①

تذكير : إذا كان u و v هما حلا للمعادلة : $ax^2 + bx + c = 0$

$$u + v = \frac{-b}{a} \text{ و } uv = \frac{c}{a}$$

لدينا u و v هما حلا للمعادلة (E) .

$$u + v = \frac{(1+a)(1+i)}{1} \quad \text{إذن :}$$

نعوض u بقيمته نحصل على : $(i+a) + v = (1+a)(1+i)$

$$v = (1+a)(1+i) - (i+a) \quad \text{و منه :}$$

$$\Leftrightarrow v = 1 + i + a + ai - i - a$$

$$\Leftrightarrow v = 1 + ai$$

■ (I) ② (I) ①

نعلم أن كل عدد حقيقي يكون دائما مساويا لمرافقه و سوف نستغل هذه الخاصية لكي نبرهن على أن $\frac{u}{v}$ عدد حقيقي .

$$\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \overline{\left(\frac{a+i}{ai+1}\right)} = \frac{\bar{a}-i}{1-i\bar{a}} \quad \text{لدينا :}$$

$$|a| = \sqrt{a\bar{a}} = 1 \quad \text{فإن : } |a| = 1$$

$$\bar{a} = \frac{1}{a} \quad \text{إذن :}$$

$$\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{\bar{a}-i}{1-i\bar{a}} = \frac{\frac{1}{a}-i}{1-\frac{1}{a}i} = \frac{1-ai}{a-i} \quad \text{و منه :}$$

نضرب بسط و مقام النتيجة الأخيرة في العدد العقدي i نحصل على :

$$\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{1-ai}{a-i} = \frac{a+i}{ai+1} = \frac{u}{v}$$

$$\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{u}{v} \quad \text{إذن نستنتج مما سبق أن :}$$

يعني أن العدد $\frac{u}{v}$ عدد حقيقي.

■ (I) ② (I) ①

$$u^2 = (a+i)^2 = a^2 + 2ai - 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow u^2 &= a\left(a + 2i - \frac{1}{a}\right) \\
 \Leftrightarrow u^2 &= a(a + 2i - \bar{a}) \\
 \Leftrightarrow u^2 &= a[(a - \bar{a}) + 2i]
 \end{aligned}$$

■ (I) ② (I) ①

بصفة عامة، إذا كان : $z = \Re(z) + i\Im(z)$ فإن $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$

$$u^2 = a[(a - \bar{a}) + 2i] \quad \text{لدينا حسب السؤال (ب) :}$$

إذن عمدة الطرف الأيمن يوافق عمدة الطرف الثاني بترديد 2π

$$2\text{Arg}(u) \equiv \text{Arg}\left(a((a - \bar{a}) + 2i)\right) [2\pi] \quad \text{أي :}$$

$$2\text{Arg}(u) \equiv \text{Arg}(a) + \text{Arg}((a - \bar{a}) + 2i) [2\pi] \quad \text{يعني :}$$

$$a - \bar{a} + 2i = 2i\Im(a) + 2i = 2i(\Im(a) + 1) \quad \text{لدينا :}$$

$$\text{Arg}(a - \bar{a} + 2i) \equiv \text{Arg}(2i) + \text{Arg}(\Im(a) + 1) \quad \text{و منه :}$$

$$\text{Arg}(2i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{إذن :}$$

و لدينا كذلك $(\Im(a) + 1) \equiv 0 [2\pi]$ عدد حقيقي. إذن :

$$2\text{Arg}(u) \equiv \text{Arg}(a) + \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{و بالتالي :}$$

$$\text{Arg}(u) \equiv \frac{1}{2} \text{Arg}(a) + \frac{\pi}{4} [\pi] \quad \text{و منه :}$$

■ (II) ①

لتكن H صورة العدد العقدي i

و لتكن $\bar{H}$ صورة العدد العقدي $-i$

و لتكن M صورة العدد العقدي a

لدينا : $|u| + |v| = m$ يعني : $|a + i| + |ai + 1| = m$

لنبين أن : $|ai + 1| = |a - i|$

لدينا : $ai + 1 = i(a - i)$

و منه : $|ai + 1| = |i(a - i)|$

يعني : $|ai + 1| = |i||a - i|$

أي : $|ai + 1| = 1|a - i| = |a - i|$

إذن : $|a + i| + |a - i| = m$

و منه : $|a - (-i)| + |a - i| = m$

أي : $\bar{H}M + HM = m$

لكي تكون مجموعة النقط (E_m) إهليلج يكفي أن نتحقق من أن : $\bar{H}H \leq m$

لدينا : $\bar{H}H = |i - (-i)| = |2i| = 2$

و لدينا حسب المعطيات : $m \geq 2$ إذن : $m \geq \bar{H}H$

و بالتالي (E_m) إهليلج مركزه هو منتصف القطعة $[\bar{H}H]$ أي النقطة O

■ (II) ② (i)

بما أن (E_m) إهليلج.

فإن معادلته الديكارتية تكتب على الشكل : $(E_m) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

لنحدد الآن قيمتي العددين a و b .

لدينا $2b = m$ إذن $b = \frac{m}{2}$

و منه : $b^2 = \frac{m^2}{4}$

و نعلم كذلك أن : $c = \frac{\bar{H}H}{2} = 1$ و $c^2 = b^2 - a^2$

إذن : $a^2 = b^2 - c^2$

و بالتالي المعادلة الديكارتية للإهليلج (E_m) هي :

$$(E_m) : \frac{x^2}{\left(\frac{m^2}{4} - 1\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{m^2}{4}\right)} = 1$$

يعني : $(E_m) : x^2 + \left(1 - \frac{4}{m^2}\right)y^2 = \left(\frac{m^2}{4} - 1\right)$

■ (II) ② (b)

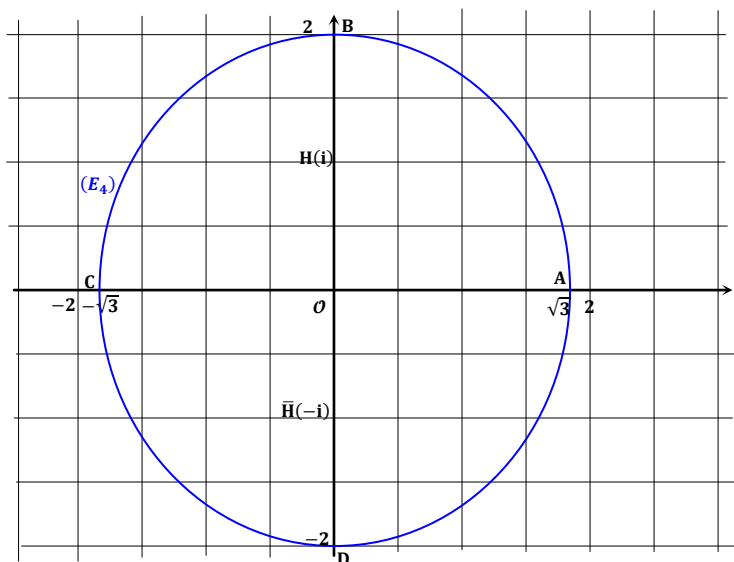
(E_4) إهليلج يتميز بالعناصر التالية :

• مركزه O

• رؤوسه : $A(\sqrt{3}, 0)$ و $B(-\sqrt{3}, 0)$ و $C(0, 2)$ و $D(0, -2)$

• بؤرتاه : $H(0, 1)$ و $\bar{H}(0, -1)$

• تباعده المركزي : $e = \frac{c}{b} = \frac{1}{2}$



■ (II) ③

في المجموعة $\mathbb{C}$ لدينا : $A(\sqrt{3})$ و $B(2i)$

إذن في المجموعة $\mathbb{R}^2$ لدينا : $A(\sqrt{3}, 0)$ و $B(0, 2)$

لنحدد معادلة المستقيم (AB) و التي تكتب في شكلها المختصر كالتالي :

$$(AB) : y = px + q$$

بحيث p هو الميل و q هو الأرتوب عند الأصل.

$$p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2}{-\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

$$(AB) : y = \frac{-2\sqrt{3}}{3}x + q \quad \text{إذن :}$$

و لدينا : $B(0, 2)$ نقطة من (AB) .

$$\text{إذن : } 2 = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \times 0 + b \quad \text{و منه : } b = 2$$

$$(AB) : y = \frac{-2\sqrt{3}}{3}x + 2 \quad \text{و بالتالي :}$$

لكي يكون (AB) مماساً للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ يكفي أن نحدد نقطة تقاطع

(AB) و $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ ثم نحدد بعد ذلك معادلة المماس لـ $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في تلك

النقطة و نبين أن تلك المعادلة ما هي إلا معادلة المستقيم (AB) .

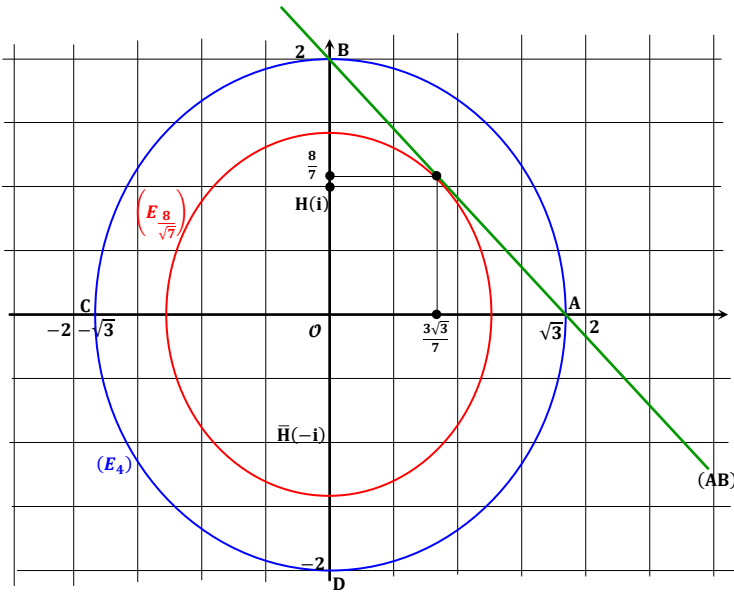
$$\frac{3\sqrt{3}}{7}x + \frac{9}{16}y\frac{8}{7} = \frac{9}{7} \quad \text{إن معادلة المماس هي :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{7}x + \frac{9}{14}y = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow y = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x$$

و هذه الكتابة الأخيرة هي بالفعل معادلة المستقيم (AB).

و بالتالي (AB) هو المماس لـ (E_8) في النقطة : $(\frac{3\sqrt{3}}{7}, \frac{8}{7})$.



التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ (1) i

نُدير خوارزمية أقليدس و نوقف محركاتها فور الحصول على باقي منعدم.

37 غير منعدم إذن واصل.

$$\begin{array}{r|l} 232 & 195 \\ & 1 \\ \hline 37 & \end{array}$$

المرحلة الأولى :

10 غير منعدم إذن واصل.

$$\begin{array}{r|l} 195 & 37 \\ & 5 \\ \hline 10 & \end{array}$$

المرحلة الثانية :

7 غير منعدم إذن واصل.

$$\begin{array}{r|l} 37 & 10 \\ & 3 \\ \hline 7 & \end{array}$$

المرحلة الثالثة :

على بركة الله، لدينا حسب السؤال (2) i :

$$\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right) : x^2 + \left(1 - \frac{4}{\left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)^2}\right)y^2 = \left(\frac{\left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)^2}{4} - 1\right)$$

$$\text{أي : } \left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right) : x^2 + \frac{9}{16}y^2 = \frac{9}{7}$$

لتحديد نقطة تقاطع (AB) و $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ نحل النظام التالية :

$$\begin{cases} x^2 + \frac{9}{16}y^2 = \frac{9}{7} \\ y = \frac{-2\sqrt{3}}{3}x + 2 \end{cases}$$

نعوض y بقيمته في المعادلة $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ نحصل على :

$$x^2 + \frac{9}{16}\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}x + 2\right)^2 = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{9}{16}\left(\frac{4}{3}x^2 + 4 - \frac{8\sqrt{3}}{3}x\right) = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{3}x = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{3}x + \frac{27}{28} = 0$$

نضرب طرفي المعادلة في العدد 28 نحصل على :

$$\Leftrightarrow (7x)^2 - 2(7x)(3\sqrt{3}) + (3\sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (7x - 3\sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (7x - 3\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{3}}{7}$$

نعوض x في معادلة (AB) نجد :

$$y = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{7} + 2 = \frac{8}{7}$$

من جهة أخرى لدينا معادلة المماس لـ $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في النقطة $\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}, \frac{8}{7}\right)$

$$xx_0 + \frac{9}{16}yy_0 = \frac{9}{7} \quad \text{تكتب على شكل :}$$

$$\text{بحيث : } x_0 = \frac{3\sqrt{3}}{7} \text{ و } y_0 = \frac{8}{7}$$

إن الحل الخاص للمعادلة هو الزوج : $(-69, -58)$

سوف نحدد الآن صيغة الحل العام للمعادلة (E)

$$195x - 232y = 1 \text{ يعني}$$

$$195(-69) - 232(-58) = 1 \text{ و لدينا}$$

ننجز عملية الفرق بين هاتين المتساويتين نحصل على :

$$195(x + 69) - 232(y + 58) = 0$$

$$(*) \quad 195(x + 69) = 232(y + 58) \text{ يعني}$$

$$195 / 232(y + 58) \text{ إذن}$$

$$195 \wedge 232 = 1 \text{ لأن } 195 / (y + 58) : (Gauss) \text{ إذن حسب}$$

$$(\exists k' \in \mathbb{Z}) ; y + 58 = 195k' \text{ و منه}$$

$$y = 195k' - 58 \text{ يعني}$$

لإيجاد قيمة x نعوض y في المعادلة (*) نحصل على :

$$195(x + 69) = 232(195k' - 58)$$

$$x = 232k' - 69 \text{ يعني}$$

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) ; k' = k + 1 \text{ بما أن } k' \text{ عدد نسبي فإن}$$

$$x = 232(k + 1) - 69 \text{ و منه}$$

$$x = 232k + 163 \text{ أي}$$

$$y = 195k' - 58 \text{ و لدينا كذلك}$$

$$y = 195(k + 1) - 58 \text{ أي}$$

$$y = 195k + 137 \text{ و منه}$$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S = \{(232k + 163 ; 195k + 137) / k \in \mathbb{Z}\}$$

■ 1 ج

$$195d \equiv 1[232] \text{ ننطلق من الشرط}$$

$$232 / (195d - 1) \text{ الذي يعني}$$

$$(\exists b \in \mathbb{Z}) ; 232b = 195d - 1 \text{ و منه}$$

$$195d - 232b = 1 \text{ أي}$$

$$\text{و منه } (d, b) \text{ حل للمعادلة (E) .}$$

$$\text{إذن } (d, b) \text{ عنصر من } (S) .$$

$$\text{و منه } \begin{cases} d = 163 + 232k \\ b = 137 + 195k \end{cases} ; (\exists k \in \mathbb{Z})$$

3 غير منعدم إذن واصل.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ 3 & 1 \end{array}$$

المرحلة الرابعة :

1 غير منعدم إذن واصل.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{array}$$

المرحلة الخامسة :

0 منعدم إذن توقف.

$$\begin{array}{r|l} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{array}$$

المرحلة السادسة :

إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 232 و 195 هو آخر باقي غير منعدم أي : 1

$$195 \wedge 232 = 1 \text{ و بالتالي}$$

■ 1 ب

في البداية يجب علينا أن نبحث عن الحل البديهي (أو الحل الخاص) (E) .

لدينا حسب خوارزمية أقليدس الواردة في السؤال السابق :

$$37 = 232 - 1 \times 195 \text{ المرحلة الأولى :}$$

$$10 = 195 - 5 \times 37 \text{ المرحلة الثانية :}$$

$$7 = 37 - 3 \times 10 \text{ المرحلة الثالثة :}$$

$$3 = 10 - 1 \times 7 \text{ المرحلة الرابعة :}$$

$$1 = 7 - 2 \times 3 \text{ المرحلة الخامسة :}$$

الطريقة هي كالتالي :

$$\text{ننطلق من المرحلة الخامسة : } 1 = 7 - 2 \times 3$$

- ثم نعوض 3 بقيمتها ثم نبسط
- ثم نعوض 7 بقيمتها ثم نبسط
- ثم نعوض 10 بقيمتها ثم نبسط
- ثم نعوض 37 بقيمتها ثم نبسط

$$1 = 7 - 2 \times 3 \text{ لدينا إلى العمل}$$

نعوض 3 في هذا التعبير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$1 = 3 \times 7 - 2 \times 10$$

نعوض 7 في هذا التعبير الأخير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$1 = 3 \times 37 - 11 \times 10$$

نعوض 10 في هذا التعبير الأخير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$1 = 58 \times 37 - 11 \times 195$$

نعوض 37 في هذا التعبير الأخير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$1 = 58 \times 232 - 69 \times 195$$

■ (3) ب

ليكن a و b عنصرين من A بحيث $f(a) = b$

لدينا : $a^{195} \equiv f(a)[233]$

و بما أن : $f(a) = b$ فإن : $a^{195} \equiv b[233]$

و منه : $(3) \quad a^{195d} \equiv b^d[233]$

من جهة أخرى لدينا حسب مبرهنة (Fermat) : $a^{232} \equiv 1[233]$

إذن : $(4) \quad a^{-232k} \equiv 1[233]$

نضرب المتوافقتين (3) و (4) طرفا بطرف نحصل على :

$$a^{195d-232k} \equiv b^d[233]$$

و منه : $a^1 \equiv b^{163}[233]$ لأن $d = 163$ هو العدد الوحيد الذي

يحقق الشرطين $195d \equiv 1[232]$ و $d \in A$

و منه : $a \equiv b^{163}[233]$ هو الجواب الأخير.

كما يمكن إضافة ما يلي : $233 / (a - b^{163})$

يعني : $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; (a - b^{163}) = 233k$

أي : $a = b^{163} + 233k ; k \in \mathbb{Z}$

■ (3) ج

نستنتج من نتيجة السؤال (3) أ :

أن f تطبيق تبائي من A نحو A

كما نستنتج من نتيجة السؤال (3) ب :

أن التطبيق f شمولي من A نحو A

إذن f تقابل من A نحو A و تقابله العكسي f^{-1} نستنتجه من جواب السؤال (ب) :

$$f : A \rightarrow A$$

$$a \rightarrow f(a) \equiv a^{195}[233]$$

و

$$f^{-1} : A \rightarrow A$$

$$b \rightarrow f^{-1}(b) \equiv b^{163}[233]$$

لدينا الشرط الآخر $0 \leq d \leq 232$

يعني : $0 \leq 163 + 232k \leq 232$

و منه : $0,7 \leq k \leq 0,2$

العدد الصحيح النسبي الوحيد المحصور بين 0,2 و 0,7 هو 0

إذن : $d = 163 + 232 \times 0 = 163$

■ (2)

يكفي : أن نتحقق من أن جميع الأعداد الأولية الأصغر من أو تساوي

$\sqrt{233}$ لا تقسم العدد 233 .

و تلك الأعداد الأولية هي : 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13

■ (3) د

ليكن a و b عنصرين من $A \setminus \{0\}$ بحيث : $f(a) = f(b)$.

$$\begin{cases} a^{195} \equiv f(a)[233] \\ b^{195} \equiv f(b)[233] \end{cases}$$

لدينا :

بما أن $f(a) = f(b)$ فإن : $a^{195} \equiv b^{195}[233]$

و منه : $a^{195d} \equiv b^{195d}[233]$

و لدينا : $195d \equiv 1[232]$ يعني : $195d = 232k + 1$

إذن : $a^{232k+1} \equiv b^{232k+1}[233]$

من جهة أخرى لدينا حسب مبرهنة فيرما : $a^{232} \equiv 1[233]$

إذن : $a^{232k} \equiv 1[233]$ و منه : $(1) \quad a^{232k+1} \equiv a[233]$

بنفس الطريقة نجد : $(2) \quad b^{232k+1} \equiv b[233]$

بما أن : $a^{232k+1} \equiv b^{232k+1}[233]$ فإن : $a \equiv b[233]$

و ذلك باستعمال النتيجة (1) و (2)

و منه : 233 يقسم $|a - b|$.

لدينا : $a \in A$ و $b \in A$

يعني : $0 < a \leq 232$ و $0 < b \leq 232$

و منه : $|a - b| \leq 232$

نلاحظ أن 233 يقسم عددا أصغر منه و هو $|a - b|$ إذن : $|a - b| = 0$

و بالتالي : $a = b$

التمرين الرابع : (10,5 ن)

1 (I) ■

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

لدينا : $g'(x) = e^x + e^x(x-1) = xe^x$

بما أن : $e^x > 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

فإن إشارة $g'(x)$ متعلقة فقط بإشارة x .

$$\left\{ \begin{array}{l} g'(x) = 0 \text{ فإن } x = 0 \\ g'(x) > 0 \text{ فإن } x > 0 \\ g'(x) < 0 \text{ فإن } x < 0 \end{array} \right.$$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

إذن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$

ولدينا كذلك : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

نلخص النتائج المحصل عليها في الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
g	1	0	$+\infty$

نلاحظ حسب هذا الجدول أن القيمة الدنيا للدالة g هي 0

و g دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) \geq 0$

2 (I) ■

لدينا g دالة تناقصية قطعاً على المجال $]-\infty, 0[$

إذن : $(\forall x < 0) ; g(x) > 0$

ولدينا g دالة تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$

إذن : $(\forall x > 0) ; g(x) > 0$

ولدينا العنصر الوحيد الذي صورته بالدالة g منعدمة هو 0. إذن : $g(0) = 0$

1 (II) ■

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)$

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{(+\infty) - 0} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = 0 + (+\infty) = +\infty$

2 (II) ■

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{e^x - e^0}{x - 0}} \right)$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - e^0}{x - 0} \right) = e^0 = 1$

فإن : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{1} = 1 = f(0)$

و منه f دالة متصلة في الصفر.

3 (II) ■

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^*$.

$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)' = \frac{(e^x - 1) - xe^x}{(e^x - 1)^2}$

$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{-1 - e^x(x-1)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2}$

3 (II) ■

لدينا حسب السؤال 1) $f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2}$

بما أن $0 < (e^x - 1)^2$; $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$

فإن إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $g(x)$

لدينا g تنعدم في نقطة واحدة أفصولها 0 و ذلك حسب السؤال 1) 2)

إذن $f'(x)$ تنعدم إذا كان $x = 0$

ولدينا كذلك حسب السؤال 1) 1) $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) \geq 0$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) \leq 0$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) = \frac{-\infty}{0 - 1} = +\infty$

ولدينا كذلك حسب السؤال 1) 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

و من هذه الدراسة نستنتج جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
f	$+\infty$	1	0

■ (II) 4 (i)

$$J(x) = \int_0^x t e^{-t} dt \quad \text{لدينا}$$

$$u'(t) = 1 \quad \text{نضع : } u(t) = t \quad \text{إذن}$$

$$v(t) = -e^{-t} \quad \text{نضع : } v'(t) = e^{-t} \quad \text{إذن}$$

$$J(x) = [uv]_0^x - \int_0^x u'v dt \quad \text{ومنه}$$

$$\Leftrightarrow J(x) = [t(-e^{-t})]_0^x - \int_0^x (-e^{-t}) dt$$

$$\Leftrightarrow J(x) = [-te^{-t}]_0^x + [-e^{-t}]_0^x$$

$$\Leftrightarrow J(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$$

$$\Leftrightarrow J(x) = e^{-x}(e^x - x - 1)$$

■ (II) 4 (b)

ليكن x عددا حقيقيا . نفصل بين ثلاث حالات :

الحالة الأولى : إذا كان x موجب فإن : $|x| = x$

$$x - |x| = 0 \quad \text{و} \quad |x| + x = 2x \quad \text{ومنه}$$

$$e^{-x} \leq e^{-t} \leq e^0 \quad \text{إذن} \quad 0 \leq t \leq x$$

$$\text{ومنه : } te^{-x} \leq te^{-t} \leq t$$

ندخل التكامل على الترتيب نحصل على :

$$\int_0^x te^{-x} dt \leq \int_0^x te^{-t} dt \leq \int_0^x t dt$$

$$e^{-x} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x \leq J(x) \leq \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x \quad \text{يعني}$$

$$\frac{x^2}{2} e^{-x} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)} \quad \text{و بالتالي}$$

الحالة الثانية : إذا كان x سالب فإن : $|x| = -x$

$$x - |x| = 2x \quad \text{و} \quad |x| + x = 0 \quad \text{ومنه}$$

$$e^0 \leq e^{-t} \leq e^{-x} \quad \text{إذن} \quad x \leq t \leq 0$$

$$\text{ومنه : } te^{-x} \leq te^{-t} \leq t \quad \text{(تغير الترتيب لأن } t \text{ عدد سالب)}$$

ندخل التكامل على الترتيب نحصل على :

$$\int_x^0 te^{-x} dt \leq \int_x^0 te^{-t} dt \leq \int_x^0 t dt$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} \left[\frac{t^2}{2} \right]_x^0 \leq -J(x) \leq \left[\frac{t^2}{2} \right]_x^0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2}{2} e^{-x} \leq -J(x) \leq \frac{-x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

الحالة الثالثة : إذا كان x منعدم فإن : $J(0) = 0$

$$\frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)} \quad \text{ومنه}$$

$$0 \leq 0 \leq 0 \quad \text{لأن}$$

خلاصة :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; \quad \frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

■ (II) 4 (c)

لدينا حسب السؤال (b)

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; \quad \frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

ومنه حسب السؤال (i)

$$\frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \leq e^{-x}(e^x - 1 - x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

نفترض أن $x \neq 0$ ثم نضرب أطراف هذا التأيير في العدد الموجب $\frac{e^x}{x^2}$

علما أن هذا الترتيب سوف لن يتغير نحصل على :

$$\frac{1}{2} e^x e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \leq \frac{(e^x - 1 - x)}{x^2} \leq \frac{1}{2} e^x e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

و بالتالي بعد تبسيط طرف اليمين و طرف اليسار نحصل على :

$$\frac{1}{2} e^{\left(\frac{x-|x|}{2}\right)} \leq \frac{(e^x - 1 - x)}{x^2} \leq \frac{1}{2} e^{\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}$$

■ (II) 4 (d)

لدينا حسب نتيجة السؤال (c)

$$\frac{1}{2} e^{\left(\frac{x-|x|}{2}\right)} \leq \frac{(e^x - 1 - x)}{x^2} \leq \frac{1}{2} e^{\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}$$

$x \rightarrow 0$

$$\left(\frac{1}{2} \right)$$

$x \rightarrow 0$

$$\left(\frac{1}{2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{إذن}$$

■ (II) 5 (ب)

نضع : $\varphi(x) = e^x(x-2) + 2 + x$

لدينا : $\varphi'(x) = (xe^x - 2e^x + 2 + x)'$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x) = xe^x + e^x - 2e^x + 1$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x) = xe^x - e^x + 1$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x) = e^x(x-1) + 1$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x) = g(x)$$

و نعلم حسب السؤال (I) ① : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) \geq 0$

و بالتالي : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi'(x) \geq 0$

أي دالة تزايدية على $\mathbb{R}$.

و لدينا : $\varphi(0) = 0$ و f دالة تزايدية على $\mathbb{R}$.

إذا كان $x \geq 0$ فإن : $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$

إذا كان $x \leq 0$ فإن : $\varphi(x) \leq \varphi(0) = 0$

■ (II) 5 (ج)

لدينا : $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} (e^x(x-2) + (x+2))$

$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \times \frac{\varphi(x)}{(e^x - 1)}$$

لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; e^x > 0$ و $(e^x - 1)^2 > 0$

إذن إشارة $f''(x)$ تتعلق بإشارة $\varphi(x)$ و $(e^x - 1)$

إذا كان $x > 0$ فإن : $\varphi(x) > 0$ و $e^x > e^0$

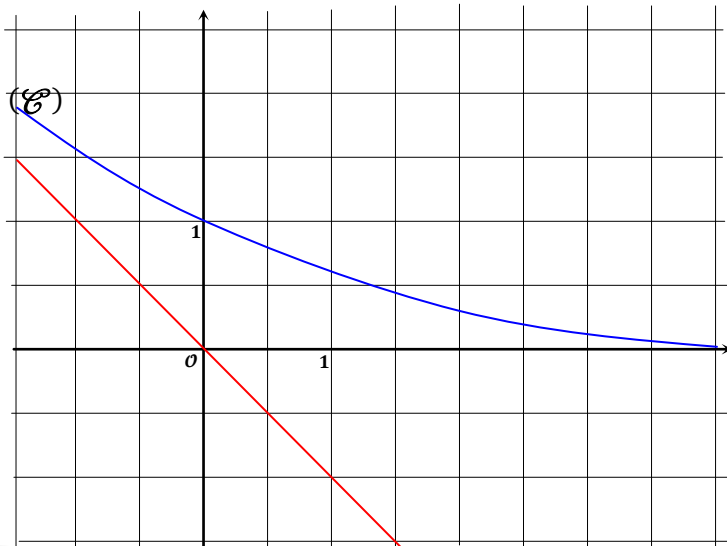
$$\text{إذن : } f''(x) > 0$$

إذا كان $x < 0$ فإن $\varphi(x) < 0$ و $e^x < e^0$

$$\text{إذن : } f''(x) > 0$$

و في كلتا الحالتين نلاحظ أن : $f''(x) > 0$; $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$ و هذا يعني أن منحنى الدالة f محدب

■ (II) 5 (د)



و لدينا من جهة أخرى :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - e^x + 1}{xe^x - x} \right)$$

نحاول إظهار الكمية $\left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \right)$ نحصل على :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} - \left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \right) \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} - \left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \right) f(x)$$

لدينا حسب السؤال (II) ② : f متصلة في 0

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \frac{-1}{2} \times 1 = \frac{-1}{2}$$

إذن f قابلة للاشتقاق في الصفر و $f'(0) = \frac{-1}{2}$

■ (II) 5 (هـ)

$$\text{لدينا : } f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-g'(x)(e^x - 1)^2 + g(x)(2(e^x - 1)e^x)}{(e^x - 1)^4}$$

$$= \frac{-xe^x(e^x - 1)^2 + (1 + (x - 1)e^x)(2(e^x - 1)e^x)}{(e^x - 1)^4}$$

$$= \frac{-xe^x(e^x - 1)^2 + 2(e^x - 1)e^x + 2(x - 1)(e^x - 1)e^{2x}}{(e^x - 1)^4}$$

$$= \frac{-xe^x(e^x - 1) + 2e^x + 2(x - 1)e^{2x}}{(e^x - 1)^3}$$

$$= \frac{e^x(-xe^x + x + 2 + 2xe^x - 2e^x)}{(e^x - 1)^3}$$

$$= \frac{e^x(xe^x + x + 2 - 2e^x)}{(e^x - 1)^3}$$

$$= \frac{e^x(e^x(x-2) + (x+2))}{(e^x - 1)^3}$$

■ (III) 1

لنحل المعادلة : $f(x) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{e^x - 1} = x$$

$$\Leftrightarrow x = xe^x - x$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 2$$

إن $\ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$

■ (III) 2 (أ)

$$\frac{-1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2} \quad \text{يكفي أن نبين أن :}$$

لدينا حسب السؤال (II) 5 (ج) : $f''(x) > 0$; $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$

إن f' دالة تزايدية على $\mathbb{R}^*$

إذا كان $x > 0$ فإن : $f'(x) \geq f'(0)$

$$(1) \quad f'(x) \geq \frac{-1}{2} \quad \text{يعني :}$$

$$f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2} \leq 0 \quad \text{لدينا من جهة أخرى :}$$

و ذلك لأن : $g(x) \geq 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

إن من الكتابة $f'(x) \leq 0$ نستنتج أن : $f'(x) \leq 0 \leq \frac{1}{2}$

$$(2) \quad f'(x) \leq \frac{1}{2} \quad \text{و منه :}$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$; $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$

يعني : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$; $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$

■ (III) 2 (ب)

بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإنه بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية على أي مجال من $\mathbb{R}$. نختار المجال الذي طرفاه $\ln 2$ و u_n .

إن يوجد عدد c محصور بين $\ln 2$ و u_n بحيث :

$$\frac{f(u_n) - f(\ln 2)}{u_n - \ln 2} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(u_n) - f(\ln 2)}{u_n - \ln 2} \right| = |f'(c)|$$

$$\Rightarrow |f(u_n) - f(\ln 2)| = |f'(c)| |u_n - \ln 2|$$

بما أن : $f'(x) \leq \frac{1}{2}$; $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$

إذن : $f'(c) \leq \frac{1}{2}$ و منه : $|f'(c)| \leq \frac{1}{2}$

و بالتالي : $|f(u_n) - f(\ln 2)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$$

■ (III) 2 (ج)

لدينا حسب السؤال (ب)

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$$

$$\Leftrightarrow |u_n - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \ln 2|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |u_{n-2} - \ln 2|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 |u_{n-3} - \ln 2|$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_{n-n} - \ln 2|$$

نستنتج إذن أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - \ln 2|$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ محصور بين 1 و -1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - \ln 2| = 0 \quad \text{و منه :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ln 2 \quad \text{يعني :}$$

و بالتالي : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و تؤول إلى $\ln 2$.

■ (IV) 1 (أ)

باستعمال البرهان بفصل الحالات نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان $x > 0$

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt \quad \text{لدينا :}$$

مع العلم أن f دالة تناقصية على $\mathbb{R}$ و ذلك حسب السؤال (II) 3 (ب)

$$x \leq t \leq 2x \quad \text{ليكن :}$$

$$f(x) \geq f(t) \geq f(2x) \quad \text{يعني :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{F(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \right) = 1 = F'(0) \quad \text{و منه :}$$

■ (IV) ② (i)

لدينا الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على $[x, 2x]$ مع $x \in \mathbb{R}^*$

إذن f تقبل دالة أصلية h بحيث : $F(x) = h(2x) - h(x)$

لدينا $x \rightarrow h(x)$ و $x \rightarrow 2x$ دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

إذن $x \rightarrow h(2x)$ دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

و لدينا : $F(x) = h(2x) - h(x)$

إذن : $F'(x) = 2h'(2x) - h'(x)$

$$\Leftrightarrow F'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = 2 \left(\frac{2x}{e^{2x} - 1} \right) - \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)$$

و بما أنك تلميذ من السنة الثانية بكالوريا علوم رياضية

فإنك تستطيع الوصول إلى النتيجة انطلاقا من التعبير أعلاه.

$$\Leftrightarrow F'(x) = \left(\frac{3 - e^x}{e^x + 1} \right) f(x) \quad \text{و منه :}$$

■ (IV) ② (b)

لدينا حسب جدول إشارة f في السؤال (II) ③ (b)

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) > 0$$

و ذلك لأن f متصلة و تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$ و قيمتها الدنيا هي : 0

إذن إشارة $F'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(3 - e^x)$.

$$\text{لأن : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x + 1 > 0$$

نستنتج إذن جدول تغيرات F كما يلي :

x	$-\infty$	0	$\ln 3$	$+\infty$
$F'(x)$	+	①	0	-
F	$-\infty$	0	$F(\ln 3)$	0

■ و الحمد لله رب العالمين ■

$$\frac{x}{e^x - 1} \geq \frac{t}{e^t - 1} \geq \frac{2x}{e^{2x} - 1} \quad \text{و منه :}$$

ندخل التكامل على هذا الترتيب نحصل على :

$$\int_x^{2x} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) dt \geq \int_x^{2x} \left(\frac{t}{e^t - 1} \right) dt \geq \int_x^{2x} \left(\frac{2x}{e^{2x} - 1} \right) dt$$

$$\left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right) \geq F(x) \geq \left(\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \right) \quad \text{و منه :}$$

الحالة الثانية : إذا كان $x < 0$

ليكن : $2x \leq t \leq x$

يعني : $f(2x) \geq f(t) \geq f(x)$

$$\int_{2x}^x f(2x) dt \geq \int_{2x}^x f(t) dt \geq \int_{2x}^x f(x) dt$$

$$-\int_x^{2x} f(2x) dt \geq -\int_x^{2x} f(t) dt \geq -\int_x^{2x} f(x) dt$$

$$-xf(2x) \geq -F(x) \geq -xf(x)$$

$$xf(2x) \leq F(x) \leq xf(x)$$

$$\left(\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \right) \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right)$$

$$\text{خلاصة : } (\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \left(\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \right) \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right)$$

■ (IV) ① (b)

$$\text{نعلم أن : } (\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \left(\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \right) \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right)$$

$$\text{و لدينا : } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\frac{e^{2x} - e^0}{2x - 0}} \right) = \left(\frac{0}{e^0} \right) = 0$$

$$\text{و لدينا كذلك : } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\frac{e^x - e^0}{x - 0}} \right) = \left(\frac{0}{e^0} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0 = F(0) \quad \text{و بالتالي :}$$

أي F دالة متصلة في 0

■ (IV) ① (c)

$$\text{لدينا : } (\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \left(\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \right) \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2x}{e^{2x} - 1} \right) \leq \frac{F(x)}{x} \leq \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)$$