هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2007

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الإمتحانات

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن)

(I) ليكن $E = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. لكل زوج (a,b) من E^2 نضع : $a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$

0,25 ن ① (أ) تحقق أن لكل زوج (a,b) من $\mathbb{E}^2$: $a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)$

0,25 ن (ب) استنتج ان $\perp$ قانون تركيب داخلي في E .

0,50 ن ② بين أن $(E, \perp)$ زمرة تبادلية .

(II) $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 .

نذكر أن : $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدية وحدتها : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

و نذكر أن : $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

لتكن F مجموعة المصفوفات من $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل : $M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-a & a \\ a & \sqrt{2}-a \end{pmatrix}$; $a \in E$

0,50 ن ① (أ) نضع : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ تحقق أن : $A^2 = -2A$ و أن : $M(a) = 1 + \frac{a}{\sqrt{2}}A$.

0,50 ن (ب) بين أن F جزء مستقر من : $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

② ——— نعتبر التطبيق :

$$\varphi : (E, \perp) \longrightarrow (F, \times)$$
$$a \longrightarrow \varphi(a) = M(a)$$

0,50 ن (أ) بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي .

0,50 ن (ب) استنتج بنية $(F, \times)$.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

ليكن a عددا عقديا مخالفا للعددين i و $-i$

0,25 ن (I) ① (أ) تحقق أن العدد العقدي $u = a + i$ حل للمعادلة $(E) : z^2 - (1+a)(1+i)z + (1+a^2)i = 0$.

0,25 ن (ب) حدد v الحل الثاني للمعادلة (E) .

② نفترض أن $|a| = 1$.

0,25 ن (أ) بين أن : $\frac{u}{v} \in \mathbb{R}$

0,25 ن (ب) تحقق أن : $u^2 = a[(a - \bar{a}) + 2i]$

0,50 ن (ج) استنتج أن : $arg(u) = \frac{1}{2}arg(a) + \frac{\pi}{4}[\pi]$

0,50 ن ③ بين أن $|u| + |v| \geq 2$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.
ليكن m عددا حقيقيا أكبر قطعا من 2 . و (E_m) مجموعة النقط $M(a)$ من المستوى العقدي بحيث :

$$|u|+|v|=m$$

① بين أن (E_m) إهليلج مركزه أصل المعلم O . 0,50 ن

② نضع : $a=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان .

ⓐ بين أن : $x^2+\left(1-\frac{4}{m^2}\right)y^2=\frac{m^2}{4}-1$ معادلة ديكارتية للإهليلج (E_m) . 0,25 ن

ⓑ أنشىء الإهليلج (E_4) . 0,25 ن

③ نعتبر النقطتين $A(\sqrt{3})$ و $B(2i)$ رَأْسَيْ الإهليلج (E_4) . بين أن المستقيم (AB) مماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$. 0,50 ن

التمرين الثالث : (3,0 ن)

نعتبر المعادلة : $(E)\ :\ 195x-232y=1$.

① ⓐ حدد $195\wedge 132$. 0,50 ن

ⓑ بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{(163+232k\ ;\ 137+195k)\ ;\ k\epsilon\mathbb{Z}\}$ 0,50 ن

ⓒ أوجد العدد الصحيح الطبيعي d الوحيد الذي يحقق : $0\le d\le 232$ و $195d\equiv 1[232]$. 0,25 ن

② بين أن العدد 233 عدد أولي. 0,25 ن

③ لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين 0 و 232 . نعتبر التطبيق f من A نحو A المعرف بما يلي : مهما يكن a من A فإن $f(a)$ هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a^{195} على 233.
نقبل أن : $a^{232}\equiv 1[233]$: $\forall a\epsilon A\setminus\{0\}$.

ⓐ بين أن لكل عنصرين a و b من المجموعة A ، إذا كان $f(a)=f(b)$ فإن : $a=b$. 0,50 ن

ⓑ ليكن a و b عنصرين من المجموعة A بحيث $f(a)=b$. حدد a بدلالة b . 0,50 ن

ⓒ استنتج أن التطبيق f تقابل ثم حدد تقابله العكسي f^{-1} . 0,50 ن

التمرين الرابع : (10,5 ن)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=1+(x-1)e^x$.

(I) ① بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $g(x)\ge 0$. 0,50 ن

② بين أن $x=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة : $g(x)=0$. 0,25 ن

(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{e^x+1} & ;\ \forall x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)$ 0,50 ن

② بين أن الدالة f متصلة في 0. 0,25 ن

③ ⓐ أحسب $f'(x)$ من أجل كل عنصر x من $\mathbb{R}^*$. 0,50 ن

ⓑ إستنتج تغيرات الدالة f . 0,25 ن

④ نعتبر التكامل : $J(x)=\int_0^x te^{-t}dt$ حيث x عدد حقيقي .

ⓐ باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $J(x)=e^{-x}(e^x-1-x)$. 0,50 ن

ⓑ بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\le J(x)\le\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$ 1,00 ن

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

0,50 ن	ج) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\frac{1}{2}e^{\frac{x-\lvert x\rvert}{2}} \leq \frac{e^x-1-x}{x^2} \leq \frac{1}{2}e^{\frac{x+\lvert x\rvert}{2}}$
0,75 ن	د) استنتج أن الدالة f قابلة للإشتقاق في 0 و أن $f'(0) = \frac{-1}{2}$.
0,50 ن	5) أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)}(e^x(x-1)+2+x)$
0,50 ن	ب) أدرس إشارة $e^x(x-2)+2+x$ لكل x من $\mathbb{R}$.
0,25 ن	ج) استنتج أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f''(x) > 0$.
0,50 ن	د) أنشىء $(\mathscr{C})$

(III) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \ ; \ \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

0,25 ن	1) بين أن $x = \ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$
0,50 ن	2) أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\lvert f'(x)\rvert \leq \frac{1}{2}$.
0,50 ن	ب) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $\lvert u_{n+1} - \ln 2\rvert \leq \frac{1}{2}\lvert u_n - \ln 2\rvert$
0,50 ن	ج) استنتج أن المتتالية : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها.

(IV) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{e^t-1}dt \ ; \ \forall x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

0,50 ن	1) أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\frac{2x^2}{e^{2x}-1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x-1}$
0,25 ن	ب) بين أن الدالة F متصلة في 0.
0,50 ن	ج) بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق في 0 وأن : $F'(0) = 1$.
0,50 ن	2) أ) بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $F'(x) = \frac{3-e^x}{e^x+1}f(x)$
0,25 ن	ب) أدرس تغيرات الدالة F .

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma