

التمرين الأول : (2,0 ن)

■ 1

توزيع أربع كرات مرقمة على 6 أشخاص يمكن أن يتم بخمس طرق مختلفة :

الطريقة الأولى : إعطاء شخص واحد الكرات الأربع.

الطريقة الثانية : إعطاء شخص واحد الكرة الأولى ثم نعطي الشخص الثاني الكرات الثلاث المتبقية.

الطريقة الثالثة : إعطاء شخص واحد كرتين و شخص ثاني كرتين.

الطريقة الرابعة : إعطاء شخص واحد كرة واحدة و شخص ثاني كرة واحدة و شخص ثالث كرتين.

الطريقة الخامسة : نعطي كل شخص كرة واحدة .

في الطريقة الأولى لدينا :

• C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه الكرات الأربع .

في الطريقة الثانية لدينا :

- C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه كرة واحدة
- و C_4^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه إياه
- و C_5^1 إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه الكرات الثلاث المتبقية.

في الطريقة الثالثة لدينا :

- C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص الذي سنعطيه الكرتين
- و C_4^2 إمكانية لاختيار الكرتين.
- و C_5^1 إمكانية لاختيار الشخص الآخر صاحب الكرتين المتبقيتين.

في الطريقة الرابعة لدينا :

- C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الأولى.
- و C_4^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- و C_5^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الثانية.
- و C_3^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- و C_4^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرتين المتبقيتين.

في الطريقة الخامسة لدينا :

- C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الأولى.
- و C_4^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- و C_5^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الثانية.
- و C_3^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- و C_4^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الثالثة.
- و C_2^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.
- و C_3^1 إمكانية لاختيار الشخص صاحب الكرة الرابعة.
- و C_1^1 إمكانية لاختيار الكرة التي سنعطيه.

التطبيق العددي :

ط 5	ط 4	ط 3	ط 2	ط 1	الطريقة :
8640	1440	180	120	6	عدد الإمكانيات

و بالتالي : عدد الإمكانيات لتوزيع الكرات الأربع على الأشخاص الستة هو :

$$6 + 120 + 180 + 1440 + 8640 = 10386$$

■ 2

الشخص A يمكنه أن يحصل على :

- كرة واحدة بـ C_4^1 إمكانية.
- أو يحصل على كرتين بـ C_4^2 إمكانية.
- أو يحصل على ثلاث كرات بـ C_4^3 إمكانية.
- أو يحصل على أربع كرات بإمكانية واحدة .

إذن عدد الإمكانيات التي يحصل فيها الشخص A على كرة واحدة على الأقل هو :

$$C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15$$

و منه : احتمال أن يحصل الشخص A على كرة واحدة على الأقل يساوي :

$$\frac{15}{10386} \approx 0,0015 \equiv 0,15\%$$

■ 3

إذا حصل الشخص C على كرة واحدة رقمها m و حصل الشخص B على كرة واحدة رقمها n فإن الشخص A سيحصل على (m + n) كرة و لدينا :

$$m + n + 2 = 4$$

$$\Leftrightarrow m + n = 2$$

نعلم أن $m \neq n$ إذن هذه المعادلة لا تقبل حولا في المجموعة

$$\{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$$

و بالتالي نحن بصدد حدث مستحيل و احتمال وقوعه 0

التمرين الثاني : (4,0 ن)

(I) ■

نضع : $z = x + iy$ ثم ننطلق من الكتابة : $f(z) = 0$

$$\Leftrightarrow (1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + i\sqrt{3})(x + iy) + 2(x - iy) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - \sqrt{3}y) + i(-y + \sqrt{3}x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \sqrt{3}y = 0 \\ -y + \sqrt{3}x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \sqrt{3}y \\ 3x = \sqrt{3}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = x + i\sqrt{3}x$$

$$\Leftrightarrow z = x(1 + i\sqrt{3})$$

و منه : مجموعة حلول المعادلة $f(z) = 0$ في $\mathbb{C}$ نكتب على الشكل :

$$\mathcal{S} = \{ x(1 + i\sqrt{3}) / x \in \mathbb{R} \}$$

(II) ① (I) ■

$$f(z) = \frac{1}{6}((1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z})$$
 لدينا :

$$\Leftrightarrow f(z_n) = \frac{1}{6}((1 + i\sqrt{3})z_n + 2\bar{z}_n)$$

$$\Rightarrow |f(z_n)| = \left| \frac{1}{6}((1 + i\sqrt{3})z_n + 2\bar{z}_n) \right|$$

نعلم أن : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ و $|z| = |\bar{z}|$.

$$\Rightarrow |f(z_n)| \leq \frac{1}{6}|(1 + i\sqrt{3})z_n| + \frac{1}{6}|2\bar{z}_n|$$
 إذن :

$$\Rightarrow |f(z_n)| \leq \left(\frac{1}{6}\right)2|z_n| + \left(\frac{2}{6}\right)|z_n|$$

$$\Rightarrow |f(z_n)| \leq \frac{2}{3}|z_n|$$

$$\Rightarrow |z_{n+1}| \leq \frac{2}{3}|z_n|$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$$

و نعلم أن معيار عدد عقدي يكون دائما موجبا.

$$(\forall n \in \mathbb{R}) \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$$
 إذن :

(II) ① (B) ■

$$(\forall n \in \mathbb{R}) \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$$
 لدينا :

$$0 \leq u_n \leq \frac{2}{3}u_{n-1}$$
 من أجل $(n-1)$ نحصل على :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 0 \leq u_n &\leq \frac{2}{3}u_{n-1} \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)u_{n-2} \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 u_{n-3} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n u_{n-n} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n u_0$$
 وبالتالي :

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$
 لدينا :

لأن $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها موجب و أصغر من 1

و بالتالي : $(u_n)_n$ متقاربة و تؤول إلى الصفر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0$$
 يعني :

(II) ② (I) ■

$$\mathcal{S}_n = OM_0 + OM_1 + \dots + OM_n$$
 لدينا :

$$\Leftrightarrow \mathcal{S}_n = |z_0| + |z_1| + \dots + |z_n|$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{S}_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$(\forall n \in \mathbb{R}) \quad 0 \leq u_n \leq \frac{2}{3}u_{n-1}$$
 و نعلم أن :

$$\begin{cases} u_0 \leq 1 \\ u_1 \leq \left(\frac{2}{3}\right) \\ \vdots \\ u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{cases}$$
 إذن :

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2r}{3} \left(\left(\frac{3\cos\theta}{4} - \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4} \right) + \left(i \frac{\sqrt{3}\cos\theta}{4} - i \frac{\sin\theta}{4} \right) \right) \\
 &= \frac{2r}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta - \frac{1}{2} \sin\theta \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta - \frac{1}{2} \sin\theta \right) \right) \\
 &= \frac{2r}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{i}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \right) \\
 &= \frac{2r}{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \frac{2r}{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

■ (III) ②

لدينا : $f(z_{k-1})$ هو لحق النقطة M_k بحيث : $k \in \{1, \dots, n\}$

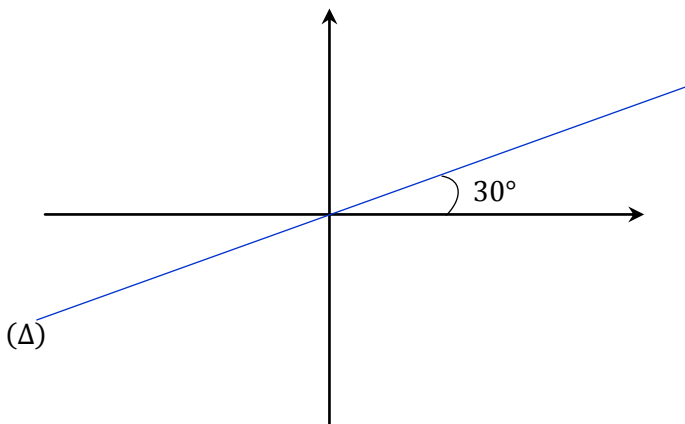
$$f(z) = \frac{2r}{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \quad \text{و لدينا :}$$

$$\Rightarrow f(z_{k-1}) = \frac{2r}{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\Rightarrow \arg(f(z_{k-1})) \equiv \arg\left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(f(z_{k-1})) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

و بالتالي النقط M_1 و M_2 و $\dots$ و M_n تنتمي إلى نفس المستقيم (Δ) المبين في الشكل التالي :



$$u_0 + u_1 + \dots + u_n \leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad \text{و منه :}$$

$$\Leftrightarrow S_n \leq \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)} \right)$$

$$\Leftrightarrow S_n \leq 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right)$$

$$\text{و لدينا : } \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \geq 0 \quad \text{إذن : } -\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \leq 0$$

$$\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right) \leq 1 \quad \text{و منه :}$$

$$3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right) \leq 3 \quad \text{يعني :}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : S_n \leq 3 \quad \text{و بالتالي :}$$

■ (II) ② ب

$$S_n = OM_0 + OM_1 + \dots + OM_n \quad \text{لدينا :}$$

نلاحظ أن :

$$(OM_0 + \dots + OM_n) + OM_{n+1} > (OM_0 + \dots + OM_n)$$

$$S_{n+1} > S_n \quad \text{إذن :}$$

إذن $(S_n)_n$ متتالية تزايدية

و بما أنها مكبورة بالعدد 3 (يعني : $S_n \leq 3$) فإنها متقاربة.

■ (III) ①

$$f(z) = \frac{1}{6} \left((1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z} \right) \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{6} (r(1 + i\sqrt{3})e^{i\theta} + 2re^{-i\theta})$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \frac{2r}{3} \left(\left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} \right) e^{i\theta} + \frac{e^{-i\theta}}{2} \right)$$

$$= \frac{2r}{3} \left(\left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} \right) (\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{2} (\cos\theta - i\sin\theta) \right)$$

$$= \frac{2r}{3} \left(\frac{\cos\theta}{4} + i\frac{\sin\theta}{4} + i\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{4} - \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4} + \frac{\cos\theta}{2} - i\frac{\sin\theta}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \frac{2r}{3} \left(\frac{3\cos\theta}{4} + i\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{4} - \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4} - i\frac{\sin\theta}{4} \right)$$

التمرين الثالث : (3,5 ن)

■ (I) 1

$$2y^2 - 4y - 7x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(y^2 - 2y) = 7x$$

$$\Leftrightarrow 2(y - 1)^2 = 7x + 2$$

$$\Leftrightarrow (y - 1)^2 = \frac{7}{2}x + 1$$

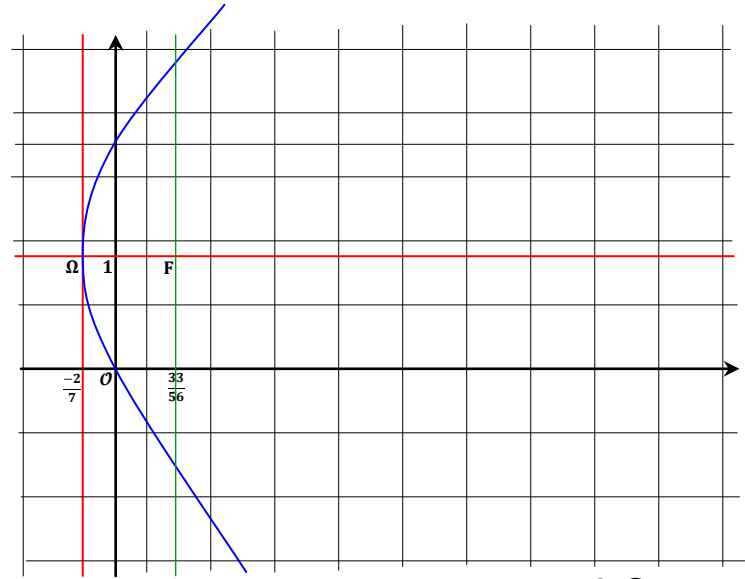
$$\Leftrightarrow (y - 1)^2 = \frac{7}{2}\left(x + \frac{2}{7}\right)$$

$$\text{إن } \Omega\left(-\frac{2}{7}; 1\right) \text{ شلجم رأسه :}$$

$$\text{و بؤرته : } F\left(\frac{7}{8} - \frac{2}{7}; 0 + 1\right)$$

$$\text{يعني : } F\left(\frac{33}{56}; 1\right)$$

■ (I) 2



■ (II) 1 (i)

$$\text{لدينا : } 2(y - 1)^2 = 7x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2(y^2 - 2y + 1) = 7x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2y(y - 2) = 7x$$

$$\Leftrightarrow 7 / 2y(y - 2)$$

و بما أن العدد 7 أولي فإن :

$$\Leftrightarrow 7/2 \text{ أو } 7/y \text{ أو } 7/(y - 2)$$

$$\Leftrightarrow y \equiv 0[7] \text{ أو } y \equiv 2[7]$$

■ (II) 1 (ب)

في حالة : $y \equiv 0[7]$

لدينا : $y = 7k$; $(\exists k \in \mathbb{Z})$

و لدينا : $2y(y - 2) = 7x$

يعني : $2(7k)(7k - 2) = 7x$

إذن : $x = 14k^2 - 4k$

و في حالة : $y \equiv 2[7]$

لدينا : $y = 7k + 2$; $(\exists k \in \mathbb{Z})$

و لدينا : $2y(y - 2) = 7x$

يعني : $2(7k + 2)(7k) = 7x$

إذن : $x = 14k^2 + 4k$

و بالتالي : مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S = \{(14k^2 - 4k; 7k), (14k^2 + 4k; 7k + 2) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

■ (II) 2

لدينا : $x \wedge y = 9$

في حالة : $x = 14k^2 - 4k$ و $y = 7k$

لدينا حسب خوارزمية إقليدس :

$14k^2 - 4k$	$7k$
$-4k$	$2k$

إذن من هذه القسمة الأقليدية نستنتج أن :

$$(14k^2 - 4k) \wedge (7k) = (7k) \wedge (-4k) = k$$

$$\text{لأن : } 7 \wedge (-4) = 1$$

و منه : $x \wedge y = k = 9$

و منه نحصل على النقطة : $M_1(1098; 63)$

■ (3) (أ)

$$u \rightarrow \frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} \quad \text{لدينا :}$$

دالة متصلة على المجال $[0, \pi]$ لأنها خارج معرف لدالتين متصلتين على $[0, \pi]$ بحيث : $2 + \cos u \neq 0$

إن فهي تقبل دالة أصلية F على المجال $[0, \pi]$.

يعني : F قابلة للاشتقاق على المجال $[0, \pi]$.

$$F'(x) = \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x} \quad \text{و لدينا :}$$

■ (3) (ب)

ليكن x عنصرا من المجال $[0, \pi]$

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} \right) du \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{dt}{du} = \frac{1 + t^2}{2} \quad \text{نضع :} \quad t = \tan\left(\frac{u}{2}\right) \quad \text{إن :}$$

$$F(x) = \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \left(\frac{1 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}{2 + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \right) \left(\frac{2}{1+t^2} \right) dt \quad \text{و منه :}$$

$$F(x) = 2 \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} dt$$

■ (3) (ج)

$$F(x) = 2 \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} dt$$

$$= 2 \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2} \right) dt$$

$$= 2 \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \left(\frac{t}{1+t^2} \right) dt - 2 \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \left(\frac{t}{3+t^2} \right) dt + 2 \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \left(\frac{1}{3+t^2} \right) dt$$

$$= [\ln(1+t^2)]_0^{\tan(\frac{x}{2})} - [\ln(3+t^2)]_0^{\tan(\frac{x}{2})} + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$\text{في حالة : } x = 14k^2 + 4k \text{ و } y = 7k + 2$$

$$14k^2 + 4k = 2k(7k + 2) \quad \text{لدينا :}$$

إن من هذه النتيجة نستنتج أن :

$$(14k^2 + 4k) \wedge (7k + 2) = (7k + 2)$$

$$x \wedge y = 7k + 2 = 9 \quad \text{و منه :}$$

$$k = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$\text{و منه نحصل على النقطة : } M_2(18; 9)$$

التمرين الرابع : (3,0 ن)

■ (1)

$$\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2} = \frac{t}{1+t^2} + \frac{1-t}{3+t^2} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{t(3+t^2) + (1-t)(1+t^2)}{(1+t^2)(3+t^2)}$$

$$= \frac{t^2 + 2t + 1}{(1+t^2)(3+t^2)}$$

$$= \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}$$

ملاحظة : المسار العكسي لهذه المتساوية ستم دراسته بتفاصيله في السنة الأولى من الأقسام التحضيرية أو الأسس الثاني من الجامعة أو السنة الأولى من (BTS) . و هذه العملية تسمى :

< la décomposition d'une fraction rationnel en éléments simples >

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{-1}{(x-2)} + \frac{1}{(x-3)} \quad \text{مثال :}$$

■ (2)

$$\int_0^\alpha \left(\frac{1}{3+t^2} \right) dt = \frac{1}{3} \int_0^\alpha \left(\frac{1}{1+\frac{t^2}{3}} \right) dt \quad \text{لدينا :}$$

$$dt = \sqrt{3} du \quad \text{نضع :} \quad u = \frac{t}{\sqrt{3}} \quad \text{إن :}$$

$$\int_0^\alpha \left(\frac{1}{3+t^2} \right) dt = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{1+u^2} \right) dt \quad \text{و منه :}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\alpha \left(\frac{1}{3+t^2} \right) dt = \frac{\sqrt{3}}{3} [\text{Arctan } u]_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{3}}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\alpha \left(\frac{1}{3+t^2} \right) dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arctan}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)$$

■ ① ②

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{xe^{nx}} \right) = \frac{1}{n} \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f_n(x) - \frac{1}{n}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-nx}) = 0 \quad \text{و لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty \quad \text{كما نعلم أن :}$$

إذن من هذه النتائج نستنتج أن المستقيم $y = \frac{1}{n}x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{xe^{nx}} \right) = +\infty \quad \text{و لدينا كذلك :}$$

(*)

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(\ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \ln \left(\frac{1 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{3 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)} \right) \right) = \int_0^\pi \left(\frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} \right) du$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty \quad \text{و نعلم أن :}$$

إذن $(\mathcal{E}_n)$ يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتيب نحو الأسفل.

■ ②

$$f'_n(x) = \left(\frac{x}{n} - e^{-nx} \right)' = \frac{1}{n} + ne^{-nx} > 0$$

إذن دالة f_n تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$.

نستنتج جدول تغيرات الدالة f_n كما يلي :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_n(x)$		+
f_n	$-\infty$	$+\infty$

■ ③ ①

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f_n .

f_n دالة متصلة و تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$.

إذن f_n تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

بما أن : $0 \in \mathbb{R}$ فإنه يمتلك سابقاً واحداً α_n من $\mathbb{R}$ بالتقابل f_n .

و بالتالي : $f_n(\alpha_n) = 0$; $(\exists! \alpha_n \in \mathbb{R})$

$$= \ln \left(1 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right) - \ln \left(3 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right)$$

$$= \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \ln \left(\frac{1 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{3 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)} \right)$$

■ ③ ②

لدينا F متصلة على يسار π إذن : $\lim_{x \rightarrow \pi^-} F(x) = F(\pi)$

إذن :

و لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \ln \left(\frac{1 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{3 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)} \right) = \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ u = \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)}} \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{u}}{1 + \frac{3}{u}} \right) = \ln 1 = 0$$

و لدينا كذلك :

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}(" + \infty ") = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

نعوض هاتين النهايتين في المتساوية (*) نحصل على :

$$\ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} = \int_0^\pi \left(\frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} \right) du$$

التمرين الخامس : (3,0 ن)

■ ① ①

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{n} - e^{-nx} \right) = (+\infty) - 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{1}{n} - \frac{e^{-nx}}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{xe^{nx}} \right)$$

$$= (-\infty) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{0^-} \right)$$

$$= -\infty$$

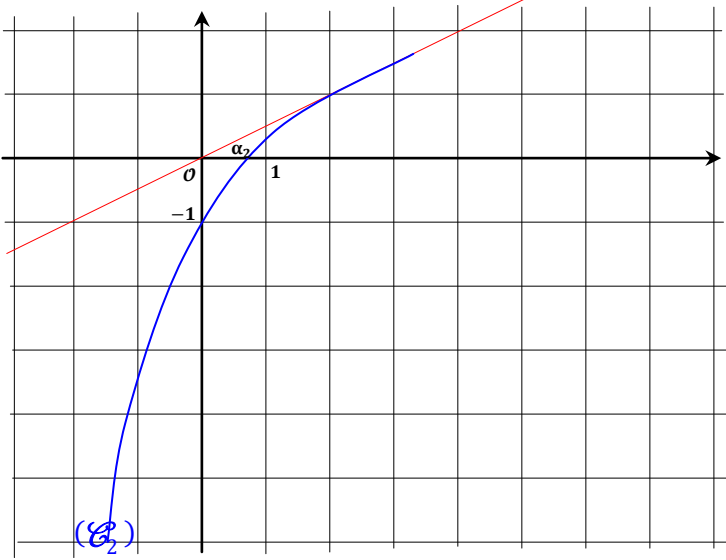
و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطة :

$$\exists c \in \left] \frac{1}{n}, 1 \right[; f_n(c) = 0$$

و بما أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا و هو α_n .

$$\frac{1}{n} < \alpha_n < 1 \quad \text{فإن} \quad \alpha_n = c \quad \text{ومنّه} :$$

■ (4)



■ (5) (i)

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{n+1} - e^{-(n+1)\alpha_n}$$

$$\Leftrightarrow f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n - ne^{-(n+1)\alpha_n} - e^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \left(\frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}} - 1 - \frac{1}{n} \right)$$

$$\text{و نعلم أن : } f_n(\alpha_n) = 0 \quad \text{إذن : } e^{-n\alpha_n} = \frac{\alpha_n}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}} = \frac{\alpha_n}{n(e^{-n\alpha_n}) \cdot e^{-\alpha_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}} = \frac{\alpha_n}{n \cdot \left(\frac{\alpha_n}{n} \right) \cdot e^{-\alpha_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}} = e^{\alpha_n}$$

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \left(e^{\alpha_n} - 1 - \frac{1}{n} \right) \quad \text{و بالتالي :}$$

■ (3) (ب)

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{e}\right)$$

بما أن : $n \geq 2$ فإن : $n^2 \geq 4$.

$$\text{أي : } n^2 \geq 4 > e \quad \text{ومنّه} : \frac{1}{n^2} < \frac{1}{e}$$

$$\text{يعني : } \frac{1}{n^2} - \frac{1}{e} < 0$$

$$\text{و بالتالي : } (\forall n \geq 2) ; f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$$

■ (3) (ج)

$$\text{نضع : } \varphi(x) = e^x - x - 1 \quad \text{إذن : } \varphi'(x) = e^x - 1$$

و منه : نستنتج جدول تغيرات الدالة φ كما يلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
φ	$+\infty$	0	$+\infty$

بما أن دالة متصلة على $\mathbb{R}$ و قيمتها الدنيا حسب الجدول هي 0

$$\text{فإنه : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi(x) \geq 0$$

$$\text{يعني : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x \geq x + 1$$

و من هذه المتفاوتة نستنتج : $e^n \geq n + 1$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$\text{و منه : } e^n \geq n \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^n} < \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow e^{-n} < \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} - e^{-n} > 0 \right) \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow f_n(1) = \frac{1}{n} - e^{-n} > 0$$

■ (3) (د)

لدينا دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

إذن فهي متصلة على $\left] \frac{1}{n} ; 1 \right]$ بحيث : $n \geq 2$.

$$\text{و لدينا : } f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0 \quad \text{و} \quad f_n(1) > 0$$

$$\text{إذن : } f_n(1) \cdot f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$$

■ 6 أ

ليكن $n \geq 2$.

لدينا : $f_n(\alpha_n) = 0$ إذن : $e^{-n\alpha_n} = \frac{\alpha_n}{n}$

و نعلم أن : $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$ إذن : $\frac{1}{n^2} < \frac{\alpha_n}{n} < \frac{1}{n}$

و بالتالي : $\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$

■ 6 ب

لدينا : $\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$

إذن : $\ln\left(\frac{1}{n^2}\right) < \ln(e^{-n\alpha_n}) < \ln\left(\frac{1}{n}\right)$

لأن الدالة $\ln$ تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}_+^+$.

و منه : $-2\ln(n) < -n\alpha_n < -\ln(n)$

إذن : $\ln(n) < n\alpha_n < 2\ln(n)$

و بالتالي : $\frac{\ln(n)}{n} < \alpha_n < \frac{2\ln(n)}{n}$

■ 6 ج

من التأطير الثمين الأخير الذي حصلنا عليه نستنتج أن :

$\lim_{n \rightarrow \infty}(\alpha_n) = 0$

لأن : $\lim_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{2\ln n}{n}\right) = 0$

■ و الحمد لله رب العالمين ■

■ 5 ب

لدينا حسب السؤال : (ج) 3 $e^{\alpha_n} \geq \alpha_n + 1$ (#)

و لدينا حسب السؤال : (د) 3 $\alpha_n > \frac{1}{n}$

إذن : (##) $\alpha_n + 1 > \frac{1}{n} + 1$

من (#) و (##) نستنتج أن : $e^{\alpha_n} \geq \frac{1}{n} + 1$

يعني : $e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \geq 0$

و بالتالي : $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$

لأن الكمية $\frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}$ موجبة دائماً.

■ 5 ج

لدينا : (*) $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$

لأن f_{n+1} حل للمعادلة : $f_{n+1}(x) = 0$.

و لدينا : (***) $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$

من (*) و (***) نستنتج أن : $f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$

و بما أن f_{n+1} دالة تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$.

فإن : $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$

و بالتالي : (1) $(\alpha_n)_n$ تناقصية.

و لدينا : $\frac{1}{n} < \alpha_n$ و $\frac{1}{n} > 0$

إذن : $\alpha_n > 0$

يعني : (2) $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ مصغورة بالعدد 0

من (1) و (2) نستنتج أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة.
و سوف نحدد نهايتها فيما بعد.