

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الانجاز : أربع ساعات

الملكية المغربية



وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والإمتحانات

الامتحانات الوطنية الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة الاستدراكية 2006

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (2,0 ن)

نوزع بطريقة عشوائية أربع كرات غير قابلة للتمييز باللمس و مرقمة 1 و 2 و 3 و 4 على ستة أشخاص A و B و C و D و E و F ، (كل شخص يمكنه أن يحصل على 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 كرات)

① ما هو عدد إمكانيات توزيع الكرات الأربع على الأشخاص الستة ؟

0,50 ن

② أحسب احتمال أن يحصل الشخص A على كرة واحدة على الأقل .

0,50 ن

③ أحسب احتمال الحدث التالي : " مجموع عددي الكرات المحصل عليها من طرف الشخصين B و C يساوي عدد الكرات المحصل عليها من طرف الشخص A .

1,00 ن

التمرين الثاني : (4,0 ن)

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر التطبيق f المعروف من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ بما يلي :

$$f(z) = \frac{1}{6} \left((1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z} \right)$$

(I) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z) = 0$.

0,50 ن

(II) نضع $z_0 = 1$ و $z_{n+1} = f(z_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$ و نرمز بـ u_n لمعيار العدد العقدي z_n .

① بين أن : $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

0,50 ن

② استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة و احسب نهايتها .

0,50 ن

② لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $S_n = \sum_{k=0}^n OM_k = OM_1 + \dots + OM_n$

و لكل k من $\mathbb{N}$ نعتبر M_k صورة العدد العقدي z_k .

① بين أن $S_n \leq 3$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

0,50 ن

② بين أن المتتالية $(S_n)_{n \geq 0}$ متقاربة (حساب نهاية $(S_n)_{n \geq 0}$ غير مطلوب)

0,50 ن

(III) نضع $z = re^{i\theta}$ حيث $\theta \in]-\pi, \pi]$ و $r \in \mathbb{R}_+^*$.

① بين أن : $f(z) = \frac{2}{3}r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) e^{\frac{i\pi}{6}}$

1,00 ن

② بين أن النقط M_1 و M_2 و و M_n مستقيمة $(n \in \mathbb{N}^*)$.

0,50 ن

التمرين الثالث : (3,5 ن)

المستوى منسوب إلى معلم متعاقد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

ليكن (Γ) المنحنى الذي معادلته $2y^2 - 4y - 7x = 0$.

① (I) بين أن (Γ) شلجم و حدد رأسه و بؤرتيه. 0,75 ن

② أنشئ المنحنى (Γ) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$. 0,25 ن

(II) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $2(y - 1)^2 = 7x + 2$: (E) .

① (أ) بين أن : $y \equiv 0[7]$ أو $y \equiv 2[7]$. 1,00 ن

(ب) استنتج أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : 0,50 ن

$$S = \{(14K^2 - 4k ; 7k) / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(14k^2 + 4k ; 7k + 2) / k \in \mathbb{Z}\}$$

② حدد النقط $M(x, y)$ من المنحنى (Γ) بحيث : $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ و $x \wedge y = 9$. 1,00 ن

التمرين الرابع : (3,0 ن)

① بين أن : $(\forall t \in \mathbb{R}) ; \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} = \frac{t}{(1+t^2)} - \frac{t}{(3+t^2)} + \frac{1}{(3+t^2)}$ 0,25 ن

② بين أن : $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) ; \int_0^\alpha \frac{1}{(3+t^2)} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \right)$ 0,50 ن

③ نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0, \pi]$ بما يلي : $F(x) = \int_0^x \frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} du$ 0,50 ن

① بين أن F قابلة للإشتقاق على $[0, \pi]$. 0,50 ن

② باستعمال مكاملة بتغيير المتغير $t = \tan \left(\frac{u}{2} \right)$ بين أن : 0,50 ن

$$(\forall x \in [0, \pi[; F(x) = 2 \int_0^{\tan \frac{\pi}{2}} \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} dt$$

نذكر أن : $\cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $\sin u = \frac{2t}{1+t^2}$ حيث : $t = \tan \frac{u}{2}$ و $u \in [0, \pi[$

③ باستعمال السؤالين ① و ② بين أن : 0,75 ن

$$(\forall x \in [0, \pi[; F(x) = \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \left(\frac{\tan \left(\frac{x}{2} \right)}{\sqrt{3}} \right) + \ln \left(\frac{1 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{3 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)} \right)$$

④ باستعمال اتصال الدالة F بين أن : $\int_0^\pi \frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} du = \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ 0,50 ن

التمرين الخامس : (3,0 ن)

في هذا التمرين x يرمز لعدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 2

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$

ليكن $(\mathcal{E}_n)$ التمثيل المبياني للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

① ① أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ 0,50 ن

② ② أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathcal{E}_n)$. 0,75 ن

③ ② أحسب $f'_n(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f_n . 0,75 ن

③ ① بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}$. 0,50 ن

④ ② بين أن : $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$ 0,25 ن

⑤ ② بين أن $e^x \geq x + 1$; $(\forall x \in \mathbb{R})$ ثم استنتج أن $f_n(1) > 0$. 0,75 ن

⑥ ④ بين أن : $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$ 0,50 ن

⑦ ④ أنشئ المنحنى $(\mathcal{E}_2)$ (نأخذ : $\alpha_2 \approx 0,6$) 0,50 ن

⑧ ⑤ ① بين أن $(\forall n \in \mathbb{N})$ بحيث $n \geq 2$ لدينا : $f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \right)$ 0,50 ن

⑨ ② استنتج أن : $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$; $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$ 0,50 ن

⑩ ② بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة. 0,75 ن

⑪ ⑥ ① باستعمال السؤال ③ بين أن : $\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$; $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$ 0,50 ن

⑫ ② استنتج أن : $\frac{\ln n}{n} < \alpha_n < \frac{2 \ln n}{n}$; $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$ 0,50 ن

⑬ ② حدد : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ 0,25 ن