

التمرين الأول : (2,5 ن)

■ (1) (i)

ليكن (x, y) حلا للمعادلة (E) .

هذا يعني أن : $(x+1)^2 = 9 + 5y$

و منه : $5/(x+4)(x-2)$ أي : $5/(x+1)^2 - 9$

و بما أن 5 عدد أولي :

فإن : $5/(x+4)$ أو $5/(x-2)$

و منه : $5/(x+4) - 5$ أو $5/(x-2)$

يعني : $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 2[5]$

■ (1) (b)

إذا كان : $x \equiv 1[5]$ فإن : $5/(x-1)$

و منه : $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; x - 1 = 5k$

يعني : $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; x = 5k + 1$

و منه حسب المعادلة (E) : $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; (5k + 1 + 1)^2 = 9 + 5y$

يعني : $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; 25k^2 + 4 + 20k = 9 + 5y$

و منه : $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; y = 5k^2 + 4k - 1$

إذا كان : $x \equiv 2[5]$ فإن : $5/(x-2)$

يعني : $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; x - 2 = 5k$

أي : $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; x = 5k + 2$

و منه حسب المعادلة (E) : $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; (5k + 3)^2 = 9 + 5y$

يعني : $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; 25k^2 + 9 + 30k = 9 + 5y$

إذن : $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; y = 5k^2 + 6k$

و بالتالي : S مجموعة حلول المعادلة (E) تكتب على الشكل :

$$S = \{ (5k + 1 ; 5k^2 + 4k - 1) ; (5k + 2 ; 5k^2 + 6k) / k \in \mathbb{Z} \}$$

■ (2)

أذكر في البداية بمبدأ خوارزمية أقليدس :

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array} \Rightarrow a \wedge b = b \wedge c$$

$$\begin{array}{c|c} 5k^2 + 4k - 1 & 5k + 1 \\ \hline 3k - 1 & k \end{array} \quad \text{لدينا :}$$

إذن :

$$(5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k + 1) = (5k + 1) \wedge (3k - 1) \quad (1)$$

$$\begin{array}{c|c} 5k + 1 & 3k - 1 \\ \hline 2k + 2 & 1 \end{array} \quad \text{و لدينا كذلك :}$$

$$(2) \quad (5k + 1) \wedge (3k - 1) = (3k - 1) \wedge (2k + 2)$$

$$\begin{array}{c|c} 3k - 1 & 2k + 2 \\ \hline k - 3 & 1 \end{array} \quad \text{و لدينا كذلك :}$$

$$(3) \quad (3k - 1) \wedge (2k + 2) = (2k + 2) \wedge (k - 3)$$

$$\begin{array}{c|c} 2k + 2 & k - 3 \\ \hline 8 & 2 \end{array} \quad \text{و لدينا كذلك :}$$

$$(4) \quad (2k + 2) \wedge (k - 3) = (k - 3) \wedge 8$$

من النتائج (1) و (2) و (3) و (4) نستنتج أن :

$$(5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k + 1) = (k - 3) \wedge 8$$

■ (3)

لنحل النظام التالية :

$$\begin{cases} 121^{(x)} = 59^{(y)} \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 9 + 5y \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$$

نستنتج من هذه الكتابة الأخيرة أن (x, y) حل للمعادلة (E) و $x \equiv 1[5]$

إذن حسب نتيجة السؤال (ب) :

$$x = 5k + 1 \quad \text{و} \quad y = 5k^2 + 4k - 1$$

بما أن : $x \wedge y = 8$ فإن : $(5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k + 1) = 8$

و منه حسب السؤال (2) : $(k - 3) \wedge 8 = 8$

إذن : 8 تقسم العدد $(k - 3)$.

$$\Rightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) ; k - 3 = 8n$$

$$\Rightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) ; k = 8n + 3$$

$$\begin{cases} x = (5k + 1) = 40n + 16 \\ y = 5k^2 + 4k - 1 = 320n^2 + 272n + 56 \end{cases} \quad \text{و بالتالي :}$$

و بالتالي مجموعة حلول النظام هي :

$$S' = \{ (40n + 16 ; 320n^2 + 272n + 56) / n \in \mathbb{Z} \}$$

التمرين الثاني : (4,5 ن)

■ (1) (I)

إذا كان : $2 - m > 0$ و $10 - m > 0$

يعني : $m < 2$ و $m < 10$

$$(\mathcal{E}_m) : \frac{x^2}{(\sqrt{10-m})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2-m})^2} = 1 \quad \text{فإن :}$$

و منه : $(\mathcal{E}_m)$ إهليلج.

إذا كان : $2 < m < 10$

فإن : $10 - m > 0$ و $m - 2 > 0$

$$(\mathcal{E}_m) : \frac{x^2}{(\sqrt{10-m})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{m-2})^2} = 1 \quad \text{و منه :}$$

إذن : $(\mathcal{E}_m)$ هذلول.

■ (II) ①

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(E) ; z^2 - (6\cos\alpha)z + (1 + 8\cos^2\alpha) = 0$$

$$\Delta = (6\cos\alpha)^2 - 4(1 + 8\cos^2\alpha) = (2i \sin\alpha)^2 \quad \text{لدينا} :$$

و منه (E) تقبل حلين عقديين مترافقين z_1 و z_2 معرفين كما يلي :

$$\begin{cases} z_1 = \frac{6\cos\alpha + 2i \sin\alpha}{2} = 3\cos\alpha + i \sin\alpha \\ z_2 = \frac{6\cos\alpha - 2i \sin\alpha}{2} = 3\cos\alpha - i \sin\alpha \end{cases}$$

■ (II) ② (i)

نضع : $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$

$$\frac{9\cos^2\alpha}{9} + \frac{\sin^2\alpha}{1} = 1 \quad \text{و منه} : \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\frac{(3\cos\alpha)^2}{3^2} + \frac{\sin^2\alpha}{1} = 1 \quad \text{أي} :$$

إذن الزوج $(3\cos\alpha ; \sin\alpha)$ يحقق معادلة الإهليلج $(\mathcal{E}_1)$

و منه : $M_1 \in (\mathcal{E}_1)$

■ (II) ② (ب)

لتكن $P(x_0; y_0)$ نقطة من الإهليلج $(\mathcal{E}_1)$

المعادلة الديكارتية لـ (T) مماس الإهليلج $(\mathcal{E}_1)$ في P هي :

$$(T) : \frac{xx_0}{9} + \frac{yy_0}{1} = 1$$

$$\Leftrightarrow (T) : y = \left(\frac{-x_0}{9y_0}\right)x + 1$$

لدينا : M_1 هي صورة z_1 إذن : $M_1(3\cos\alpha ; \sin\alpha)$

و منه المعادلة الديكارتية المختصرة لـ (OM_1) نكتب على شكل :

$$(OM_1) : y = \left(\frac{\sin\alpha}{3\cos\alpha}\right)x$$

ننطلق من الكتابة : $(OM_1) \parallel (T)$

$$\left(\frac{-x_0}{9y_0}\right) = \left(\frac{\sin\alpha}{3\cos\alpha}\right) \quad \text{هذا يعني أن لهما نفس الميل أي} :$$

$$(*) \quad x_0 = -3y_0 \cdot \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) \quad \text{و منه} :$$

و بما أن : $P(x_0; y_0) \in (\mathcal{E}_1)$

$$\frac{x_0^2}{3^2} + \frac{y_0^2}{1^2} = 1 \quad \text{فإن} :$$

إذا كان : $m > 10$ فإن : $m - 2 > 0$ و $10 - m < 0$

$$\text{و منه} : (\mathcal{E}_m) : -\left(\frac{x^2}{(\sqrt{m-10})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{m-2})^2}\right) = 1$$

نلاحظ أن $(\mathcal{E}_m) = \emptyset$ موجهة إذن : $\left(\frac{x^2}{(\sqrt{m-10})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{m-2})^2}\right)$ الكمية

■ (I) ②

في الحالة $m < 2$ يعني : $m < 10$

$$\text{لدينا} : (\mathcal{E}_m) : \left(\frac{x^2}{(\sqrt{10-m})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2-m})^2}\right) = 1$$

و منه : $(\mathcal{E}_m)$ إهليلج مركزه $O(0,0)$

و رؤوسه : $A(\sqrt{10-m}, 0)$ و $B(-\sqrt{10-m}, 0)$

و $A'(0, \sqrt{2-m})$ و $A(0, -\sqrt{2-m})$

نضع : $a = \sqrt{10-m}$ و $b = \sqrt{2-m}$

لدينا : $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(2-m) - (10-m)} = 2\sqrt{2}$

و منه : بؤرتا الإهليلج $(\mathcal{E}_m)$ هما : $F(2\sqrt{2}, 0)$ و $F'(-2\sqrt{2}, 0)$

في الحالة : $2 < m < 10$

$$\text{لدينا} : (\mathcal{E}_m) : \left(\frac{x^2}{(\sqrt{10-m})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{m-2})^2}\right) = 1$$

و منه : $(\mathcal{E}_m)$ هذلول مركزه $O(0,0)$

و رأساه هما : $A(\sqrt{10-m}, 0)$ و $A'(-\sqrt{10-m}, 0)$

نضع : $a = \sqrt{10-m}$ و $b = \sqrt{m-2}$

لدينا : $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(m-2) + (10-m)} = 2\sqrt{2}$

و منه : بؤرتا الهذلول $(\mathcal{E}_m)$ هما : $F(\sqrt{8}, 0)$ و $F'(-\sqrt{8}, 0)$

و لدينا كذلك : $(\mathcal{E}_m)$ يقبل مقاربين (Δ) و (Δ') معرفين بما يلي :

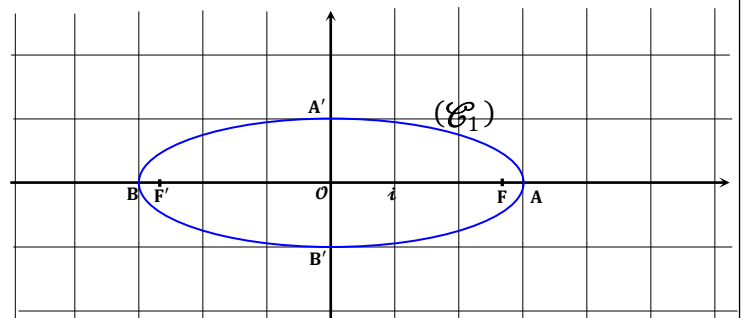
$$\begin{cases} (\Delta) : y = \left(\sqrt{\frac{m-2}{10-m}}\right)x \\ (\Delta') : y = -\left(\sqrt{\frac{m-2}{10-m}}\right)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\Delta) : y = \frac{b}{a}x \\ (\Delta') : y = -\frac{b}{a}x \end{cases}$$

■ (I) ③

لدينا حسب ما سبق $(\mathcal{E}_1)$ إهليلج مركزه $O(0,0)$

و رؤوسه : $A(3,0)$ و $B(-3,0)$ و $A'(0,1)$ و $B'(0,-1)$

و بؤرتاه هما : $F(\sqrt{8}, 0)$ و $F'(-\sqrt{8}, 0)$



التمرين الثالث : (2,5 ن)

■ (1)

تذكير : ليكن p احتمال وقوع حدث A في تجربة عشوائية E .

عند إعادة التجربة E مرة متتالية فإن احتمال الحصول على

الحدث A بالضبط k مرة هو : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

في هذا التمرين : الحدث A هو الحصول على كرة بيضاء.

و لدينا : $p(A) = \frac{10}{n}$

نكرر التجربة n مرة.

إذن احتمال الحصول على الحدث A k مرة هو احتمال الحصول على k كرة

بيضاء و يساوي : $p_k = C_n^k (p(A))^k (1-p(A))^{n-k}$

إذن : $p_k = C_n^k \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-k}$

يمكن ترك هذه النتيجة على ما هي عليه و نكون بذلك قد أجبنا على

السؤال باقتصاد تام . و يمكن إضافة بعض المراحل إن كنت من هواة

الحساب الحرفي لكي تصل إلى النتيجة التالية :

$$p_k = C_n^k \left(\frac{10}{n-10}\right)^k \left(\frac{n-10}{n}\right)^n$$

■ (2) (i)

نضع : $u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k}$

$$u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{C_n^{k+1} \left(\frac{10}{n-10}\right)^{k+1} \left(\frac{n-10}{n}\right)^n}{C_n^k \left(\frac{10}{n-10}\right)^k \left(\frac{n-10}{n}\right)^n} \quad \text{لدينا :}$$

و لدينا :

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \times \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{(n-k)}{(k+1)}$$

$$u_k = \frac{(n-k)}{(k+1)} \times \left(\frac{10}{n-10}\right) \quad \text{و منه :}$$

■ (2) (b)

نفترض أن : $u_k \geq 1$

لدينا حسب المعطيات $k \geq 0$

يكفي إذن أن نبرهن على أن : $k \leq 9$

لدينا : $u_k \geq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-k)}{(k+1)} \times \left(\frac{10}{n-10}\right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)} \geq 1$$

بما أن : $n \geq k$ فإن : $n-k \geq 0$

و منه العدان : $10(n-k)$ و $(n-10)(k+1)$ موجبان.

نعوض x_0 بقيمته حسب (*) في آخر تعبير حصلنا عليه نجد :

$$\frac{1}{9} \left(-3y_0 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 + y_0^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow y_0^2 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow y_0^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow y_0^2 = \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow y_0 = \pm \cos \alpha$$

إذا كان $y_0 = \cos \alpha$ فإن : $x_0 = -3y_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = -3 \sin \alpha$

إذا كان $y_0 = -\cos \alpha$ فإن : $x_0 = -3y_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = 3 \sin \alpha$

$$\begin{cases} P_1(3 \sin \alpha ; -\cos \alpha) \\ P_2(-3 \sin \alpha ; \cos \alpha) \end{cases}$$

و بالتالي : توجد نقطتان

من الإهليلج $(\mathcal{E}_1)$: حيث المماس لـ $(\mathcal{E}_1)$ في كل منهما يوازي (OM_1)

■ (II) (2) (c)

لدينا : $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ و $P_1(3 \sin \alpha - i \cos \alpha)$

و $P_2(-3 \sin \alpha + i \cos \alpha)$

$$\begin{aligned} OM_1^2 + OP_1^2 &= |z_1|^2 + |3 \sin \alpha - i \cos \alpha|^2 \quad \text{و منه :} \\ &= (9 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (9 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= 9(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= 10 \end{aligned}$$

و بنفس الطريقة لدينا :

$$\begin{aligned} OM_2^2 + OP_2^2 &= |z_2|^2 + |-3 \sin \alpha + i \cos \alpha|^2 \\ &= (9 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (9 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= 9(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$OM_1^2 + OP_1^2 = OM_2^2 + OP_2^2 \quad \text{و بالتالي :}$$

التمرين الرابع : (10,5 ن)

■ (I) ① ①

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1+x)e^{-2x}$$

$$= \lim_{\substack{m \rightarrow -\infty \\ m=2(x+1)}} \left(\frac{e^2}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)e^{-2x}$$

$$= \lim_{\substack{m \rightarrow +\infty \\ m=2(x+1)}} \left(\frac{e^2}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)} \right) = 0$$

■ (I) ① ②

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ حسب السؤال ①

إن : (ع) يقبل مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$ و هو محور الأفاصيل

و لدينا كذلك حسب السؤال ① $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{-2x} = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{-2x} = +\infty \quad \text{و :}$$

إن : (ع) يقبل فرعا شلجيا بجوار $-\infty$ اتجاهه محور الأراتيب

■ (I) ②

لدينا : $f(x) = (1+x)e^{-2x}$

إن f دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$

و منه : $f'(x) = e^{-2x} - 2(1+x)e^{-2x}$

$$\Leftrightarrow f'(x) = e^{-2x} - 2e^{-2x} - 2xe^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -e^{-2x} - 2xe^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -(1+2x)e^{-2x}$$

بما أن : $e^{-2x} > 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1+2x)$.

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) e^{-2\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{e}{2} \quad \text{لدينا :}$$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

نستنتج إذن جدول تغيرات f كما يلي :

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
		+	-
f		$\frac{e}{2}$	
	$-\infty$		0

$$\Leftrightarrow 10(n-k) \geq (n-10)(k+1)$$

$$\Leftrightarrow 10n - 10k \geq nk + n - 10k - 10$$

$$\Leftrightarrow 10n - n + 10 \geq k(n - 10 + 10)$$

$$\Leftrightarrow k \leq \frac{9n+10}{n}$$

$$\Leftrightarrow k \leq 9 + \frac{10}{n}$$

$$\Leftrightarrow k \leq 9$$

و بالتالي : $0 \leq k \leq 9$

الشطر الثاني من السؤال :

ننتقل من : $10 \leq k \leq (n-1)$

يعني : $(1) \quad 10 \leq 10(n-k) \leq 10(n-10)$

و لدينا كذلك : $10 \leq k \leq (n-1)$

يعني : $11(n-10) \leq (n-10)(K+1) \leq 10(n-1)$

$$(2) \quad \frac{1}{n(n-10)} \leq \frac{1}{(n-10)(k+1)} \leq \frac{1}{11(n-10)} \quad \text{و منه :}$$

نضرب التآطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على :

$$\frac{10}{n(n-10)} \leq \frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)} \leq \frac{10(n-10)}{11(n-10)}$$

$$\frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)} \leq \frac{10}{11} \quad \text{و منه :}$$

$$u_k \leq 1 \quad \text{أي :}$$

■ (2) ②

لدينا من أجل : $0 \leq k \leq 9$: $u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1$

يعني : $p_{k+1} \geq p_k$

و منه المتتالية $(p_k)_k$ تزايدية .

و لدينا كذلك : من أجل : $10 \leq k \leq n-1$: $u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k} \leq 1$

يعني : $p_{k+1} \leq p_k$

و منه المتتالية $(p_k)_k$ تناقصية .

نستنتج أن أكبر قيمة لهذه المتتالية هي : p_{10}

$$M = p_{10} = C_n^{10} \left(\frac{10}{n-10} \right)^{10} \left(\frac{n-10}{n} \right)^n \quad \text{إن :}$$

$$\Leftrightarrow M = \frac{n! \times 10^{10} \times (n-10)^n}{10! (n-10)! \times (n-10)^n \times n^n}$$

$$\Leftrightarrow M = \frac{n!}{n^n} \times \frac{10^{10}}{10!} \times \frac{(n-10)^n}{(n-10)!}$$

■ (I) ④ ب

الحل العام للمعادلة (E) يكتب على شكل : $y = y_H + y_p$

بحيث y_p هو حل خاص للمعادلة (E) (نأخذ يساوي f)

و y_H هو حل المعادلة التفاضلية : $y'' + 3y' + 2y = 0$; (E_H)

و لحلها نحل أولا معادلتها المميزة : $r^2 + 3r + 2 = 0$

و التي تقبل حلين حقيقيين $r_1 = -1$ و $r_2 = -2$ و ذلك بعد حساب

المميز $\Delta = 1$

إذن : $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ / $y_H = \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x}$

و بالتالي : الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) يكتب على الشكل :

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x} + f(x)$$

بحيث : α و β عددين حقيقيين .

■ (II) ①

يشير التكامل هندسيا إلى قياس طول أو مساحة أو حجم

$$A_n = \int_0^n f(x) dx = \int_0^n (1+x)e^{-2x} dx \quad \text{إذن :}$$

نضع $u(x) = 1+x$ و منه : $u'(x) = 1$

ثم نضع $v'(x) = e^{-2x}$ و منه : $v(x) = \frac{-1}{2}e^{-2x}$

باستعمال مكاملة بالأجزاء نحصل على : $A_n = [uv] - \int u'v$

$$\Leftrightarrow A_n = \left[\frac{-(1+x)e^{-2x}}{2} \right]_0^n + \frac{1}{2} \int_0^n e^{-2x} dx$$

$$\Leftrightarrow A_n = \left[\frac{-(1+x)e^{-2x}}{2} \right]_0^n + \frac{1}{2} \left[\frac{-e^{-2x}}{2} \right]_0^n$$

$$\Leftrightarrow A_n = \left(\frac{-(1+n)e^{-2n}}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{-e^{-2n}}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow A_n = e^{-2n} \left(\frac{-(1+n)}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow A_n = e^{-2n} \left(\frac{-3-2n}{4} \right) + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow A_n = \frac{-e^{-2n}}{4} (2n+3) + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow A_n = \frac{3 - (2n+3)e^{-2n}}{4}$$

■ (I) ③ ا

لدينا : $f'(x) = -(1+2x)e^{-2x}$

إذن : $f''(x) = -2e^{-2x} + 2(1+2x)e^{-2x}$

$$\Leftrightarrow f''(x) = -2e^{-2x} + 2e^{-2x} + 4xe^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow f''(x) = 4xe^{-2x}$$

إذا كان : $x = 0$ فإن : $f''(x) = 0$

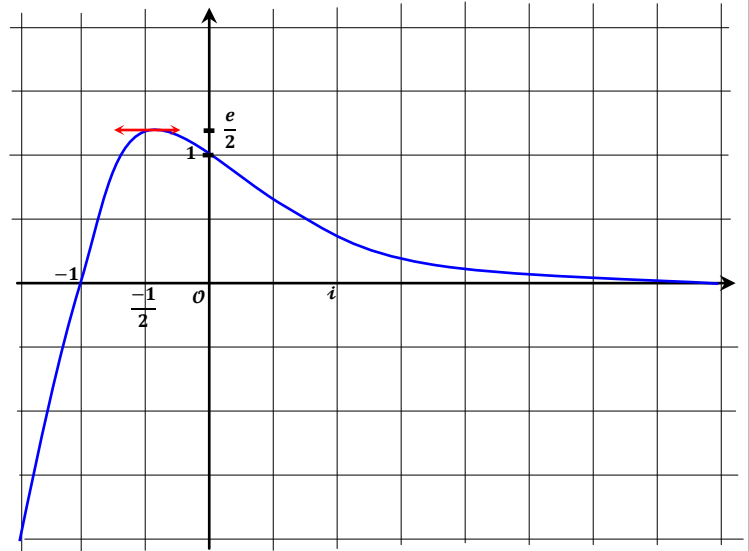
إذا كان : $x > 0$ فإن : $f''(x) > 0$

إذا كان : $x < 0$ فإن : $f''(x) < 0$

نستنتج إذن الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$(\mathcal{C})$	مُفَعَّر $(\mathcal{C})$	$\Omega(0,1)$ نقطة انعطاف	مُحَدَّب $(\mathcal{C})$

■ (I) ③ ب



■ (I) ④ ا

$$\begin{cases} f(x) = (1+x)e^{-2x} \\ f'(x) = -(1+2x)e^{-2x} \\ f''(x) = 4xe^{-2x} \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned} f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) &= 4xe^{-2x} - 3(1+2x)e^{-2x} + 2(1+x)e^{-2x} \\ &= (4x - 3 - 6x + 2 + 2x)e^{-2x} \\ &= -e^{-2x} \end{aligned}$$

إذن f حل خاص للمعادلة التفاضلية : (E)

$$(E) : y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow 1 - t \leq \frac{1}{t+1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \int (1-t) dt \leq \int \left(\frac{1}{t+1}\right) dt \leq \int 1 dt$$

$$\Leftrightarrow t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$$

نعوض t بالقيمة $\frac{x}{n}$ نحصل على :

$$\Leftrightarrow \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} \leq \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}$$

نضرب أطراف هذا التآطير في العدد الموجب الغير المنعدم n نحصل على :

$$\Leftrightarrow x - \frac{x^2}{2n} \leq n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq x$$

■ (III) ③ (i)

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

لدينا حسب السؤال ② (ب)

$$(\forall x \in [0, n]) , (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq x$$

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq x \quad \text{و منه :}$$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x \quad \text{و منه :}$$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب e^{-2x} نجد :

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \leq e^{-x}$$

$$\Rightarrow \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx \leq \int_0^n e^{-x} dx$$

$$\Rightarrow u_n \leq \int_0^n e^{-x} dx \quad (*)$$

■ (III) ③ (ب)

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

لدينا حسب السؤال ② (ب)

$$x - \frac{x^2}{2n} \leq n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{x^2}{2n} \leq \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow e^{\left(x - \frac{x^2}{2n}\right)} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

■ (II) ②

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+3)e^{-2n} = \lim_{\substack{m \rightarrow +\infty \\ m=2n+3}} e^3 \times \frac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)} = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 - (2n+3)e^{-2n}}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{و منه :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{3}{4} \quad \text{و بالتالي :}$$

■ (III) ①

$$\text{نضع : } u_n = n \int_0^1 [f(x)]^n dx \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

ثم نضع : $t = nx$ و منه : $dt = n dx$

إذا كان $x = 0$ فإن $t = 0$

إذا كان $x = 1$ فإن $t = n$

$$u_n = n \int_0^n \left[f\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \frac{dt}{n} \quad \text{و بالتالي :}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{n}{n} \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-\frac{2t}{n}} dt$$

$$\Leftrightarrow u_n = \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} dt$$

■ (III) ② (i)

ليكن : $u \in [1, 2]$ يعني : $1 \leq u \leq 2$

$$\text{و منه : } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{u} \leq 1 \quad \text{إذن : } \left(\frac{1}{u} \leq 1\right) \quad (1)$$

ونعلم أن : $(u-1)^2 \geq 0 \quad ; \quad (\forall u \in [1, 2])$

$$\text{إذن : } u^2 - 2u + 1 \geq 0$$

$$\text{و منه : } u^2 + 1 \geq 2u$$

نضرب الطرفين في العدد الموجب الغير المنعدم $\frac{1}{u}$ نحصل على :

$$\frac{u^2 + 1}{u} \geq 2$$

$$\text{و منه : } u + \frac{1}{u} \geq 2 \quad \text{أي : } \left(\frac{1}{u} \geq 2 - u\right) \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $2 - u \leq \frac{1}{u} \leq 1 \quad ; \quad (\forall u \in [1, 2])$

■ (III) ② (ب)

ليكن $x \in [0, n]$ و $n \in \mathbb{N}^*$

يعني : $0 \leq x \leq n$ و منه : $0 \leq \frac{x}{n} \leq 1$

$$\text{نضع : } t = \frac{x}{n} \quad \text{إذن : } 0 \leq t \leq 1$$

$$\text{أي : } 1 \leq t + 1 \leq 2$$

إذن حسب السؤال ② (i)

$$2 - (t + 1) \leq \frac{1}{t + 1} \leq 1$$

— ॐ ३ (III) ■

من (*) و (**) و نستنتج أن :

$$(***) \quad \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x - \frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} dx \leq u_n \leq \int_0^n e^{-x} dx$$

$$\int_0^n e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^n = -e^{-n} + 1 \quad \text{ولدينا:}$$

$$\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x - \frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} dx = e^{\left(\frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} [-e^{-x}]_0^{n^{\frac{1}{3}}} ,$$

$$= e^{\left(\frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} \left(-e^{-n^{\frac{1}{3}}} + 1\right)$$

$$\left(1 - e^{-n^{\frac{1}{3}}}\right) e^{\left(\frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} \leq u_n \leq (1 - e^{-n}) \quad \text{و بالتالي}$$

نحسب نهايتي طرفي هذا التأخير بجوار $+\infty$ نحصل على :

$$\underbrace{\left(1 - e^{-n^{\frac{1}{3}}}\right) e^{\left(\frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)}}_{n^\infty} \leq u_n \leq \underbrace{(1 - e^{-n})}_{n^\infty}$$

و بالتالي : $(u_n)_n$ متتالية متقاربة و تؤول إلى 1 .

—(i) 4(III) —

ليكن : $0 < a < 1$ و $a \leq x \leq 1$

لدينا f دالة تناقصية على المجال $[0, +\infty[$.

$$f(1) \leq f(x) \leq f(a) \quad : \text{إذن}$$

$$\Leftrightarrow 2e^{-2} \leq f(x) \leq f(a)$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2e^{-2} \leq f(x) \leq f(a)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq n(f(x))^n \leq n(f(a))^n$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \int_a^1 n(f(x))^n dx \leq \int_a^1 n(f(a))^n dx$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \int_a^1 n(f(x))^n dx \leq n(1-a)(f(a))^n \quad (\#)$$

$$\Leftrightarrow e^{\left(x - \frac{x^2}{2n}\right)} e^{-2x} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^n e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)} dx \leq \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\int_0^n e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)} dx \leq u_n} \quad (1)$$

ولدينا : $1 \leq n$ إذن : $1 \leq n^2$

ومنہ : $n \leq n^3$ إذن : $n^{\frac{1}{3}} \leq n$

$$(2) \quad \int_0^{\frac{1}{n^3}} e^{-\left(x + \frac{x^2}{2n}\right)} dx \leq \int_0^n e^{-\left(x + \frac{x^2}{2n}\right)} dx \quad : \text{يعني أن}$$

ليكن : $0 \leq x \leq n^{\frac{1}{3}}$ إذن : $x^2 \leq n^{\frac{2}{3}}$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq \frac{2n}{2n^{\frac{1}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow 2n^{\frac{1}{3}} \leq \frac{2n}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2n^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{-x^2}{2n}$$

$$\Leftrightarrow -x - \frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}} \leq -x - \frac{x^2}{2n}$$

$$\Leftrightarrow e^{\left(-x - \frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} \leq e^{-\left(x + \frac{x^2}{2n}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x - \frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} dx \leq \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{-\left(x + \frac{x^2}{2n}\right)} dx \right) \quad (3)$$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن :

$$\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x - \frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} dx \leq \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{-\left(x + \frac{x^2}{2n}\right)} dx \leq \int_0^n e^{-\left(x + \frac{x^2}{2n}\right)} \leq u_n$$

$$\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x - \frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}\right)} dx \leq u_n \quad (**) \quad \text{إنذن :}$$

■ (III) ④ ب

لدينا : $0 < a < 1$ إذن : $f(1) < f(a) < f(0)$

أي : $2e^{-2} < f(a) < 1$ ومنه : $\ln(f(a)) < \ln 1$

يعني : $\ln(f(a)) < 0$

و لدينا : $\downarrow$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1-a)(f(a))^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n(1-a)e^{n \ln(f(a))}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(f(a)) e^{n \ln(f(a))} \left(\frac{1-a}{\ln(f(a))} \right)$$

$$= \lim_{\substack{m \rightarrow -\infty \\ m = n \ln(f(a))}} (me^m) \left(\frac{1-a}{\ln(f(a))} \right)$$

$$= 0 \times \left(\frac{1-a}{\ln(f(a))} \right) = \boxed{0}$$

إذن حسب التآطير (#)

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_a^1 n(f(x))^n dx \leq \frac{n(1-a)(f(a))^n}{n \rightarrow \infty} \quad \begin{matrix} \swarrow n \rightarrow \infty \\ \searrow n \rightarrow \infty \end{matrix} \quad \begin{matrix} \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{matrix}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^1 n(f(x))^n dx \right) = 0 \quad \text{و بالتالي :}$$

■ (III) ④ ج

لدينا حسب نتيجة السؤال ③ ج $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$

يعني : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 n(f(x))^n dx \right) = 1$

ومنه : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^a n(f(x))^n dx + \int_a^1 n(f(x))^n dx \right) = 1$

لدينا حسب نتيجة السؤال ④ ب $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^1 n(f(x))^n dx \right) = 0$

إذن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^a n(f(x))^n dx \right) = 1 \quad ; \quad (\forall a \in]0,1[)$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■