

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الانجاز : أربع ساعات

المملكة المغربية



وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحانات الوطنية الموحد

نيل شهادة البكالوريا

الدورة العادية 2005

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن)

نعتبر في $\mathbb{R}^2$ قانون التركيب الداخلي * المعروف بما يلي :

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2), (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) : (a, b) * (x, y) = \left(\frac{ax + by}{2}, \frac{ay + bx}{2} \right)$$

$$E = \left\{ \left(m + \frac{1}{m}; m - \frac{1}{m} \right) \in \mathbb{R}^2 / m \in \mathbb{R}^* \right\} \quad \text{لتكن المجموعة :}$$

① 0,75 ن بين أن * قانون تركيب داخلي في E .

② يمكن φ التطبيق المعروف على $\mathbb{R}^*$ نحو E بما يلي : $(\forall m \in \mathbb{R}^*) ; \varphi(m) = \left(m + \frac{1}{m}; m - \frac{1}{m} \right)$

① 0,50 ن بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*, \times)$ نحو $(E, *)$.

② 0,75 ن استنتج أن $(E, *)$ زمرة تبادلية محددا عنصرها المحايد .

و مماثل كل عنصر $\left(m + \frac{1}{m}; m - \frac{1}{m} \right)$ حيث m عدد حقيقي غير منعدم .

نعتبر المجموعة $F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 2 \text{ و } y^2 = x^2 - 4 \}$.

① 1,00 ن بين أن : $F = \left\{ \left(m + \frac{1}{m}; m - \frac{1}{m} \right) \in \mathbb{R}^2 / m > 0 \right\}$

② 1,00 ن بين أن : $(F, *)$ زمرة جزئية من $(E, *)$.

التمرين الثاني : (3,0 ن)

(I) p عدد صحيح طبيعي أولي أكبر أو يساوي 5

① 0,50 ن بين أن : $p^2 \equiv 1[3]$.

② 0,50 ن ① باستعمال زوجية العدد p بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي q بحيث : $p^2 - 1 = 4q(q + 1)$.

③ 0,50 ن ② استنتج أن : $p^2 \equiv 1[8]$.

③ 0,50 ن بين أن : $p^2 \equiv 1[24]$.

(II) ليكن a عددا صحيحا طبيعيا أوليا مع العدد 24

① 0,50 ن بين أن : $a^2 \equiv 1[24]$.

② 0,50 ن هل توجد أعداد صحيحة طبيعية $a_1, a_2, \dots, a_{23}$ حيث :

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{23}^2 = 23997 \quad \text{و} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, 23\} ; a_k \wedge 24 = 1$$

التمرين الثالث : (8,5 ن)

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{-\frac{2}{x}} ; & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

ليكن $(\mathcal{E}_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، (الوحدة $2cm$)

① ① بين أن f متصلة على اليمين في 0 . 0,25 ن

② ② بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 . 0,25 ن

③ ③ بين أن f تزايدية قطعاً على $[0, +\infty[$. 0,50 ن

④ ② أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 0,25 ن

⑤ ② بين أن : $0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \frac{t^2}{2}$; $(\forall t \geq 0)$ 0,50 ن

⑥ ③ بين أن : $\frac{-4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$; $(\forall x > 0)$ 0,50 ن

⑦ ④ استنتج أن المنحنى $(\mathcal{E}_f)$ يقبل مقارباً مائلاً (Δ) ينبغي تحديد معادلته . 0,25 ن

⑧ ③ أنشئ المنحنى $(\mathcal{E}_f)$ و المستقيم (Δ) . 0,50 ن

(II) عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f_n(x) = \left(x + \frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}} ; & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

① ① بين أن f_n قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 . 0,25 ن

② ② أدرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0, +\infty[$. 0,50 ن

③ ③ بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، المعادلة : $f_n(x) = \frac{2}{n}$ تقبل حلاً وحيداً a_n في المجال $]0, +\infty[$. 0,50 ن

④ ② بين أن : $f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$; $(\forall x > 0), (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 0,50 ن

⑤ ③ استنتج أن المتتالية (a_n) تناقصية ثم بين أن (a_n) متقاربة . 0,75 ن

نضع : $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

⑥ ④ بين أن : $na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 0,50 ن

⑦ ⑤ بين أن : $a = 0$. 0,50 ن

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$$

(III) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي :

(بحيث f هي الدالة المعرفة في الجزء الأول)

① ① بين أن : $xf(x) \leq F(x) \leq xf(2x)$; $(\forall x > 0)$. 0,25 ن

② ② أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 0,25 ن

③ ② بين أن F قابلة للإشتقاق على المجال : $[0, +\infty[$. 0,50 ن

④ ② بين أن : $\begin{cases} F'(x) = e^{\frac{-2}{x}} \left((x+2) \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) + (3x+2)e^{\frac{1}{x}} \right) ; x > 0 \\ F'_d(0) = 0 \end{cases}$ 0,75 ن

($F'_d(0)$ هو العدد المشتق للدالة F على اليمين في 0)

⑤ ③ إعط جدول تغيرات الدالة F . 0,50 ن

$$f(z) = \frac{iz - 1}{(z + 1)^2}$$

لكل عدد عقدي z مخالف للعدد -1 نضع :

التمرين الرابع : (4,5 ن)

① ① حدد العدد الحقيقي y بحيث : $f(iy) = iy$. 0,25 ن

② ② حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z) = z$: (E) . 1,00 ن

نرمزب z_0 و z_1 و z_2 لحلول المعادلة (E) حيث : $\begin{cases} \operatorname{Re}(z_1) > \operatorname{Re}(z_2) \\ \operatorname{Re}(z_0) = 0 \end{cases}$

③ ② تحقق أن : $z_1 + 1 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$ و $z_2 + 1 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$ 0,50 ن

④ ② استنتج الكتابة المثلثية لكل من z_1 و z_2 0,75 ن

⑤ ③ في هذا السؤال نفترض أن : $z = e^{i\alpha}$ حيث $0 \leq \alpha < \pi$ 0,50 ن

⑥ ① بين أن : $\overline{f(z)} = izf(z)$ 0,50 ن

⑦ ② حدد α إذا علمت أن : $f(z) + \overline{f(z)} = 0$ 0,25 ن

⑧ ③ أكتب $f(z)$ على الشكل $re^{i\varphi}$ حيث : $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ 0,75 ن

⑨ ④ حدد z إذا علمت أن : $|z| = 1$ و $\operatorname{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}$ 0,50 ن