

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الانجاز : أربع ساعات

المملكة المغربية



وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحانات الوطنية الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2004

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,0 ن)

- ① ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .
 أ) بين أنه إذا كان n عددا فرديا فإن $n^2 \equiv 1[8]$. 0,50 ن
 ب) بين أنه إذا كان n عددا زوجيا فإن $n^2 \equiv 0[8]$ أو $n^2 \equiv 4[8]$. 0,50 ن
 ② ليكن a و b و c أعداد صحيحة طبيعية فردية .
 أ) بين أن $a^2 + b^2 + c^2$ ليس مربعا كاملا . 0,50 ن
 ب) بين أن : $2(ab + bc + ac) \equiv 6[8]$. 0,50 ن
 لاحظ أن : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$
 ج) استنتج أن : $2(ab + bc + ac)$ ليس مربعا كاملا . 0,50 ن
 د) بين أن $(ab + bc + ac)$ ليس مربعا كاملا . 0,50 ن

التمرين الثاني : (3,0 ن)

لتكن E مجموعة المصفوفات التي تكتب على شكل : $M_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}(a - \frac{1}{a}) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$

و F مجموعة المصفوفات المعرفة بما يلي : $N_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}(a - \frac{1}{a}) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}$

- ① أ) بين أن : $M_a \times M_b = M_{ab}$; $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^{*2})$. 0,50 ن
 ب) ليكن φ التطبيق المعرف من $\mathbb{R}^*$ نحو E بما يلي : $\varphi(a) = M_a$. 0,50 ن
 بين أن : φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*, \times)$ نحو $(E, \times)$.
 ج) استنتج البنية الجبرية لـ $(E, \times)$. 0,50 ن
 ② أ) بين أن $N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}}$; $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^{*2})$. 0,50 ن
 ب) نضع $G = E \cup F$ ، بين أن : $(G, \times)$ زمرة . 0,50 ن
 ج) هل $(G, \times)$ زمرة تبادلية ؟ 0,50 ن

التمرين الثالث : (3,5 ن)

- ① حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + z + 1 = 0$. 0,75 ن
- ② لكل عدد عقدي z حيث : $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ نضع : $z' = \frac{1}{z^2 + z + 1}$.

مع : $-\pi \leq \theta \leq \pi$ و $\theta \neq \frac{2\pi}{3}$ و $\theta \neq \frac{-2\pi}{3}$

- ① تحقق أن : $1 + z + z^2 = z(1 + z + \bar{z})$. 0,75 ن
- ② احسب معيار و عمدة z' بدلالة θ . 0,75 ن
- ③ نضع : $z' = x + iy$ حيث $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. 0,75 ن
- بين أن : $x^2 + y^2 = (1 - 2x)^2$.
- ④ استنتج أن M ذات اللق z' تنتمي إلى هلول يتم تحديد مركزه و رأسيه و مقاربيه . 0,50 ن

التمرين الرابع : (10 ن)

(I) نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

- ① أحسب نهايات f عند محداث مجموعة تعريفها $\mathcal{D}_f$. 0,50 ن
- ② أدرس تغيرات الدالة f . 0,50 ن
- ③ ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم .
- ① أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathcal{C})$. 0,50 ن
- ② أنشئ $(\mathcal{C})$. 0,25 ن

(II) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 f(u_n) = u_n e^{-u_n} ; (\forall n \in \mathbb{N}) \\ u_0 = 1 \end{cases}$

- ① بين أن : $e^x \geq x + 1 ; (\forall x \in \mathbb{R})$. 0,25 ن
- ② استنتج أن : $x^2 f(x) \leq \frac{x}{x+1} ; (\forall x > 0)$. 0,25 ن
- ③ ① باستعمال البرهان بالترجع بين أن : $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1} ; (\forall n \in \mathbb{N})$. 0,50 ن

- ② بين أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها . 0,75 ن

④ نضع من أجل كل عنصر n من $\mathbb{N}^*$: $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

- ① بين أن : $v_n = \ln \left(\frac{1}{u_n} \right) ; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$. 0,75 ن
- ② حدد نهاية المتتالية (v_n) . 0,50 ن

(III) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$F(0) = 2 \ln 2 \quad \text{و} \quad (\forall x > 0) ; F(x) = \int_{x^2}^{4x^2} f(t) dt$$

① ① ن 0,25 (أ) تحقق أن : $\int_{x^2}^{4x^2} \frac{1}{t} dt = 2 \ln 2$; $(\forall x > 0)$

② ② ن 0,50 (ب) باستعمال نتيجة السؤال ① من الجزء الثاني بين أن : $-t < e^{-t} - 1 \leq 0$; $(\forall t > 0)$.

③ ② ن 0,50 (أ) بين أن : $-3x^2 \leq F(x) - 2 \ln 2 \leq 0$; $(\forall x > 0)$.

④ ② ن 0,25 (ب) استنتج أن F متصلة و قابلة للإشتقاق على اليمين في 0.

⑤ ③ ن 0,25 (أ) بين أن $f(t) < e^{-t}$; $(\forall t \geq 1)$.

⑥ ③ ن 0,50 (ب) استنتج النهاية التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

⑦ ④ ن 0,75 (أ) بين أن F قابلة للإشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ و احسب $F'(x)$.

⑧ ④ ن 0,50 (ب) اعط جدول تغيرات الدالة F .

⑨ ⑤ ن 0,50 (ج) أنشئ $(\mathcal{E}_F)$ في معلم متعامد ممنظم.

⑩ ⑤ ن 0,50 (أ) لتكن G الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $G(x) = \int_x^{4x} e^{-t} \ln t dt$

⑪ ⑤ ن 0,50 (أ) بين أن : $G(x) = F(\sqrt{x}) - e^{-4x} \ln(4x) + e^{-x} \ln(x)$; $(\forall x > 0)$.

⑫ ⑤ ن 0,50 (ب) أحسب النهاية التالية : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (e^{-x} - e^{-4x}) \ln x$

⑬ ⑤ ن 0,25 (ج) استنتج : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} G(x)$