

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الانجاز : أربع ساعات

الملكمة المغربية



وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والإمتحانات

الإمتحانات الوطنية الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2003

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,0 ن)

نعتبر في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة (E) الآتية : $x^2(x^2 + 7) = y(2x + y)$ (E)

ليكن (x, y) عنصرا من $(\mathbb{N}^*)^2$ و ليكن δ القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y

نضع : $x = \delta a$ و $y = \delta b$

① نفترض أن (x, y) حل للمعادلة (E) .

أ) تحقق أن : $a^2(\delta^2 a^2 + 7) = b(2a + b)$ 0,50 ن

ب) إستنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث : $\delta^2 a^2 + 7 = kb$ و $2a + b = ka^2$ 0,50 ن

ج) بين أن : $a = 1$ 0,50 ن

د) إستنتج أن : $(b + 1)^2 = \delta^2 + 8$ 0,75 ن

② حل في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة (E) . 0,75 ن

التمرين الثاني : (3,5 ن)

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

نعتبر المنحنى (E) الذي معادلته : $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$

① أ) بين أن (E) جزء من إهليلج يتم تحديده. 0,50 ن

ب) أرسم المنحنى (E) . 0,50 ن

② لتكن A و B النقطتين اللتين زوجا إحداثيتهما على التوالي هما : (4; 0) و (0; 3) 0,75 ن

نعتبر النقطة M_1 من (E) التي أفسولها x_1 حيث x_1 ينتمي إلى المجال $[0; 4]$.

نضع : $x_1 = 4 \cos(t_1)$ حيث : $0 \leq t_1 \leq \frac{\pi}{2}$ و نعتبر التكامل الآتي : $I(x_1) = \frac{3}{4} \int_{x_1}^4 \sqrt{16 - x^2} dx$

أ) باستعمال المكاملة بتغيير المتغير و ذلك بوضع $x = 4 \cos(t)$ حيث : $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 1,00 ن

بين أن : $I(x_1) = 6t_1 - 3 \sin(2t_1)$

ب) لتكن $S(x_1)$ مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OM_1) و المنحنى (E) . 0,75 ن

و لتكن S مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OB) و المنحنى (E)

ب) تحقق أن أرتوب النقطة M_1 هو $3 \sin(t_1)$

0,25 ن

ج) أحسب $S(x_1)$ بدلالة t_1 .

0,25 ن

د) إستنتج قيمة S .

0,25 ن

و) بين أن : $S(x_1) = \frac{1}{2}S \Leftrightarrow t_1 = \frac{\pi}{4}$

0,25 ن

هـ) حدد إحداثيتي M_1 في المعلم $(O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ في حالة : $t_1 = \frac{\pi}{4}$

0,25 ن

التمرين الثالث : (4,5 ن)

الجزء الأول لكل (a, b) من $\mathbb{R}^2$ نعتبر المصفوفة : $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

لتكن E مجموعة المصفوفات الآتية : $E = \{M_{(a,b)} / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة.

① بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ و من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ 0,75 ن

② بين أن : $(E, +, \times)$ حلقة تبادلية واحدة. 0,25 ن

③ أ) بين أن لكل عددين حقيقيين x و y لدينا : $(x^2 + xy + y^2 = 0) \Leftrightarrow (x = y = 0)$ 0,50 ن

ب) حدد العناصر التي تقبل مقلوبا في الحلقة $(E, +, \times)$ 0,25 ن

ج) إستنتج أن : $(E, +, \times)$ جسم تبادلي. 0,50 ن

الجزء الثاني ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$.

① بين أن $(1, \sigma)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 0,25 ن

② نعتبر التطبيق ψ المعرفة من E نحو $\mathbb{C}$ بما يلي : 0,75 ن

$$\begin{aligned} \psi : E &\rightarrow \mathbb{C} \\ M_{(a,b)} &\rightarrow a + \sigma b \end{aligned}$$

بين أن ψ تشاكل تقابلي من $(E, +)$ نحو $(\mathbb{C}, +)$

③ نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - z + 1 = 0$ 0,75 ن

حل في مجموعة الأعداد العقدية هذه المعادلة و اكتب حلها على الشكل المتلثي

④ نفترض في هذا السؤال أن : $\sigma = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ 0,50 ن

بين أن ψ تشاكل من $(E, \times)$ نحو $(\mathbb{C}, \times)$

التمرين الرابع : (9,0 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{4 \ln x}{x^2} - \frac{1}{2}$

(I) و ليكن $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ وحدته : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$

① أحسب : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathcal{C})$ 0,50 ن

② (أ) بين أن : $f'(x) = 4 \left(\frac{1 - 2 \ln x}{x^3} \right)$; $\forall x \in]0; +\infty[$ 0,25 ن

(ب) إعط جدول تغيرات الدالة f . 0,75 ن

③ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين α و β بحيث : $1 < \alpha < \sqrt{e} < \beta < 3$ 0,75 ن

④ حدد معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C})$ في النقطة التي أفصولها 1 0,50 ن

⑤ أرسم $(\mathcal{C})$ 0,75 ن

(II) ① بين أن : $\forall t \in [0; +\infty[; 1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$ 0,25 ن

② استنتج أن : $\forall a \in [0; +\infty[; a - \frac{a^2}{2} \leq \ln(1+a) \leq a$ 0,50 ن

(III) لكل عدد صحيح n بحيث $n \geq 4$ نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = \frac{n \ln x}{x^2} - \frac{1}{2}$

و ليكن $(\mathcal{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم .

① أدرس تغيرات الدالة f_n . 0,50 ن

② أدرس تقعر المنحنى $(\mathcal{C}_n)$ و بين أنه يقبل نقطة انعطاف أفصولها $e^{\frac{5}{6}}$ 0,50 ن

③ (أ) قارن $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ حسب قيم x . 0,25 ن

(ب) استنتج الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_n)$ و $(\mathcal{C}_{n+1})$. 0,25 ن

④ بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين u_n و v_n بحيث : $1 < u_n < \sqrt{e} < v_n$ 0,50 ن

⑤ بين أن $(u_n)_{n \geq 4}$ متتالية تناقصية قطعاً مستعملاً نتيجة السؤال ③ 0,50 ن

⑥ (أ) باستعمال (II) ② بين أن : $\frac{(u_n - 1)(3 - u_n)}{2} \leq \ln(u_n) \leq u_n - 1$; $(\forall n \geq 4)$ 0,25 ن

(ب) استنتج أن : $\frac{(u_n)^2}{2n} \leq u_n - 1 \leq \frac{(u_n)^2}{n(3 - u_n)}$; $(\forall n \geq 4)$ 0,25 ن

(ج) بين أن : $\frac{1}{2n} \leq u_n - 1 \leq \frac{e}{n}$; $(\forall n \geq 4)$ 0,25 ن

(د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 4}$ متقاربة محددا نهايتها 0,50 ن

⑦ (أ) بين أن : $e^{\frac{5}{6}} < v_n$; $(\forall n \geq 4)$ 0,50 ن

(ب) استنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$ 0,50 ن