

الأستاذ:
نجيب
عثماني

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا
شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك
اللغة العربية
شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم
الإنسانية
تمارين بحلول في درس الدوال الأسية

أكاديمية
الجهة
الشرقية

المادة: الرياضيات

$$2-x-1-2x=x-1 \Leftrightarrow (2-x)-(1+2x)=x-1 \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{-2}{-4} \Leftrightarrow -4x=-2 \Leftrightarrow -x-2x-x=-1+1-2 \Leftrightarrow$$

$$S=\left\{\frac{1}{2}\right\} : \text{ومنه } x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$e^{(2x+1)-(x-3)}=e^1 \Leftrightarrow \frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}}=e \quad (5)$$

$$e^{2x+1-x+3}=e^1 \Leftrightarrow$$

$$x=-3 \Leftrightarrow x+4=1 \Leftrightarrow 2x+1-x+3=1 \Leftrightarrow$$

$$S=\{-3\} : \text{ومنه}$$

تمرين 5: حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات الآتية :

$$1. f(x) = xe^x + 2x$$

$$2. f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

$$\text{الأجوبة: (1) } D_f = \mathbb{R}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x - 1 \neq 0\} \quad (2)$$

$$x=0 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0$$

$$\text{ومنه } D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

تمرين 6: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

$$(1) e^{2x-1} \geq 1 \quad (2) e^{7x-1} \geq e^{2x-3} \times e^{x-2}$$

$$\text{الأجوبة: (1) } 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x-1} \geq e^0 \Leftrightarrow e^{2x-1} \geq 1$$

$$S = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[: \text{ومنه } x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$(2) e^{7x-1} \geq e^{2x-3+x-2} \Leftrightarrow e^{7x-1} \geq e^{2x-3} \times e^{x-2}$$

$$4x \geq -4 \Leftrightarrow 7x-1 \geq 2x-3+x-2 \Leftrightarrow$$

$$S = [-1; +\infty[: \text{ومنه } x \geq -1 \Leftrightarrow$$

تمرين 7: أحسب النهايات الآتية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 3} \quad (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 2} \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \frac{1}{e^x}\right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 1} \quad (4)$$

$$\text{الأجوبة: (1) لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \text{ ولدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ لأن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \frac{1}{e^x}\right) = +\infty : \text{اذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

تمرين 1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: (1) $e^x = 1$ (2)

$$(3) e^{x-2} = e$$

$$\text{الأجوبة: (1) } e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0$$

$$S = \{0\} : \text{ومنه } x = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2) e^{x-2} = e^1 \Leftrightarrow e^{x-2} = e$$

$$S = \{3\} : \text{ومنه } x = 3 \Leftrightarrow x-2=1 \Leftrightarrow$$

$$(3) S = \{\ln 2\} : \text{ومنه } x = \ln 2 \Leftrightarrow e^x = 2$$

تمرين 2: ليكن a و b عددين حقيقيين، أحسب وبسط ما يلي :

$$C = \frac{e^7}{e^4} \quad \text{و} \quad B = (e^{-4} \times e^6)^3 \quad \text{و} \quad A = e^3 \times e^5$$

$$\text{الأجوبة: } A = e^3 \times e^5 = e^{3+5} = e^8 \quad \text{و}$$

$$C = \frac{e^7}{e^4} = e^{7-4} = e^3 \quad \text{و} \quad B = (e^{-4} \times e^6)^3 = (e^{-4+6})^3 = (e^2)^3 = e^{2 \times 3} = e^6$$

تمرين 3: بسط ما يلي: $A = e^{-x} \times e^{2x}$, $B = (e^{-2})^2 \times e^{3x-4}$

$$C = \frac{e^{2x} \times e^{3x}}{(e^x)^4}$$

$$\text{الأجوبة: } A = e^{-x} \times e^{2x} = e^{-x+2x} = e^x$$

$$B = (e^{-2})^2 \times e^{3x-4} = e^{2 \times (-2)} \times e^{3x-4} = e^{-4} \times e^{3x-4} = e^{-4+3x-4} = e^{3x-8}$$

$$C = \frac{e^{2x} \times e^{3x}}{(e^x)^4} = \frac{e^{2x+3x}}{e^{4x}} = \frac{e^{5x}}{e^{4x}} = e^{5x-4x} = e^x$$

تمرين 4: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: (1) $e^{x+1} = 4$

$$(2) e^{1+x} = \frac{1}{e^{2x-3}} \quad (3) e^{1-x} \times e^{2x} = e$$

$$(4) \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1} \quad (5) \frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e \quad (6) e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$$

$$\text{الأجوبة: (1) } e^{1-x+2x} = e^1 \Leftrightarrow e^{1-x} \times e^{2x} = e$$

$$S = \{0\} : \text{ومنه } x = 0 \Leftrightarrow 1+x=1 \Leftrightarrow e^{1+x} = e^1 \Leftrightarrow$$

$$(2) e^{x-2} = e^1 \Leftrightarrow e^{x-2} = e$$

$$S = \{3\} : \text{ومنه } x = 3 \Leftrightarrow x-2=1 \Leftrightarrow$$

$$(3) e^{1+x} = e^{-(2x-3)} \Leftrightarrow e^{1+x} = \frac{1}{e^{2x-3}}$$

$$3x = 2 \Leftrightarrow 1+x = -2x+3 \Leftrightarrow e^{1+x} = e^{-2x+3} \Leftrightarrow$$

$$S = \left\{\frac{3}{2}\right\} : \text{ومنه } x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$(4) e^{(2-x)-(1+2x)} = e^{x-1} \Leftrightarrow \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 2} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{شكل غير محدد}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(2 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{2}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{2}{e^x}} = \frac{2 - 0}{1 + 0} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{لأن:}$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 3} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{شكل غير محدد}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x \left(1 + \frac{3}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{e^x}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{لأن:}$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{2 \times 0 - 1}{0 + 1} = -1$$

تمرين 8: أحسب $f'(x)$ في الحالات الآتية :

$$(1) f(x) = e^x + 2 \quad (2) f(x) = xe^x + 3x \quad (3) f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$\text{الأجوبة:} \quad (1) f'(x) = (e^x + 2)' = (e^x)' + (2)' = e^x + 0 = e^x$$

$$(2) f'(x) = (xe^x + 3x)' = (xe^x)' + (3x)' = (x)'e^x + x(e^x)' + 3 = e^x + xe^x + 3$$

$$(3) f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)' = \frac{(e^x - 1)' \times (e^x + 1) - (e^x - 1) \times (e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \times (e^x + 1) - (e^x - 1) \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x \times e^x + e^x - e^x \times e^x + e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

تمرين 9: نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x) = e^x + 3x$

(1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2) أحسب $f(0)$ و $f(1)$ (أعط قيمة مقربة للنتائج)

(3) أحسب $f'(x)$ و بين أن الدالة f تزايدية قطعاً على D_f

(4) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(5) حدد جدول تغيرات الدالة f

الأجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$

$$f(0) = e^0 + 3 \times 0 = 1 - 0 = 1$$

$$f(1) = e^1 + 3 \times 1 = e + 3 \approx 2,7 + 3 \approx 5,7$$

$$(3) f'(x) = (e^x + 3x)' = (e^x)' + (3x)' = e^x + 3 > 0$$

لأن: $e^x > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$ ومنه f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$

$$(4) \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 3x = 0 + 3(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 3x = +\infty + 3(+\infty) = +\infty$$

(5) جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$