

مذكرة رقم : 6
الأستاذ : عثمانى نجيب

مذكرة رقم 6 في درس الدوال الأسية

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- الدالة الأسية النبيرية؛ الرمز $\exp$ ؛ العدد e والكتابة e^x ؛ الصيغ e^{a+b} ؛ e^{a-b} ؛ e^{-a} ؛ $(e^a)^n$ ($n \in \mathbb{Z}$)؛ - دراسة وتمثيل الدالة e^x ؛ $x \rightarrow$	- حل معادلات ومتراجحات ونظمات أسية نبيرية لا يكتسي حلها صعوبة؛ - استعمال الآلة الحاسبة لتحديد قيم مقربة للعدد e^a حيث عدد حقيقي a أو تحديد قيمة مقربة لعدد a بحيث e^a عدد معلوم؛ - دراسة وتمثيل دوال بسيطة تحتوي صيغها على الدالة الأسية النبيرية؛	- نقبل في هذا المستوى أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ وتعتبران نهايتين أساسيتين؛ - إبراز العلاقة: $e^a = b \Leftrightarrow \begin{cases} a = \ln b \\ b > 0 \end{cases}$ واستعمالها في حل معادلات ومتراجحات ونظمات.

1) تعريف الدالة الأسية النبيرية

الدالة الأسية النبيرية يرمز لها ب $\exp$ وهي معرفة على $\mathbb{R}$:

$$(\forall x \in \mathbb{R}); \exp x = e^x$$

2) خاصية مقبولة

$$(\forall y \in \mathbb{R})(\forall x \in]0; +\infty[), (x = e^y \Leftrightarrow \ln(x) = y)$$

الدالة $\exp$ تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$ يعني $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \text{ لكل } x \text{ و } y \text{ من } \mathbb{R}$$

$$\text{ولدينا: } e^0 = 1 \text{ و } e^1 = e$$

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: (1) $e^x = 1$ (2) $e^{x-2} = e$ (3) $e^x = 2$

الحل: (1) $e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ومنه: } S = \{0\}$$

$$(2) e^{x-2} = e^1 \Leftrightarrow e^{x-2} = e^1$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ومنه: } S = \{3\}$$

$$(3) e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2 \text{ ومنه: } S = \{\ln 2\}$$

خاصيات جبرية

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R}); \ln(e^x) = x$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) e^x > 0 \text{ و } e^x \times e^y = e^{x+y} \text{ و } e^{-x} = \frac{1}{e^x} \text{ و } \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \text{ و } e^{rx} = (e^x)^r$$

مثال: ليكن a و b عددين حقيقيين، أحسب وبسط ما يلي: $A = e^3 \times e^5$ و $B = (e^{-4} \times e^6)^3$ و $C = \frac{e^7}{e^4}$

$$\text{الحل: } A = e^3 \times e^5 = e^{3+5} = e^8 \text{ و } B = (e^{-4} \times e^6)^3 = (e^{-4+6})^3 = (e^2)^3 = e^{2 \times 3} = e^6 \text{ و } C = \frac{e^7}{e^4} = e^{7-4} = e^3$$

تمرين 1: بسط ما يلي: $A = e^{-x} \times e^{2x}$ ، $B = (e^{2-x})^2 \times e^{3x-4}$ ، $C = \frac{e^{2x} \times e^{3x}}{(e^x)^4}$

$$\text{الحل: } A = e^{-x} \times e^{2x} = e^{-x+2x} = e^x \text{ و } B = (e^{2-x})^2 \times e^{3x-4} = e^{2 \times (2-x)} \times e^{3x-4} = e^{4-2x+3x-4} = e^x$$

$$C = \frac{e^{2x} \times e^{3x}}{(e^x)^4} = \frac{e^{2x+3x}}{e^{4x}} = \frac{e^{5x}}{e^{4x}} = e^{5x-4x} = e^x$$

تمرين 2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: (1) $e^{x+1} = 4$

$$(2) e^{1-x} \times e^{2x} = e \quad (3) \frac{e^{1+x}}{e^{2x-3}} = \frac{1}{e} \quad (4) \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1} \quad (5) \frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e \quad (6) e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$$

$$\text{الحل: (1) } e^{1-x} \times e^{2x} = e^1 \Leftrightarrow e^{1-x+2x} = e^1$$

$$\Leftrightarrow e^{1+x} = e^1 \Leftrightarrow 1+x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ومنه: } S = \{0\}$$

$$(2) e^{1-x} \times e^{2x} = e^1 \Leftrightarrow e^{1-x+2x} = e^1$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ومنه: } S = \{3\}$$

$$(3) e^{1+x} = e^{-(2x-3)} \Leftrightarrow e^{1+x} = \frac{1}{e^{2x-3}}$$

$$S = \left\{ \frac{3}{2} \right\} : \text{ومنه } x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow e^{1+x} = e^{-2x+3} \Leftrightarrow 1+x = -2x+3 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow$$

$$e^{(2-x)-(1+2x)} = e^{x-1} \Leftrightarrow \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1} \quad (4)$$

$$2-x-1-2x = x-1 \Leftrightarrow (2-x)-(1+2x) = x-1 \Leftrightarrow$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \right\} : \text{ومنه } x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2}{-4} \Leftrightarrow -4x = -2 \Leftrightarrow -x-2x-x = -1+1-2 \Leftrightarrow$$

$$e^{2x+1-x+3} = e^1 \Leftrightarrow e^{(2x+1)-(x-3)} = e^1 \Leftrightarrow \frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e \quad (5)$$

$$S = \{-3\} : \text{ومنه } x = -3 \Leftrightarrow x+4=1 \Leftrightarrow 2x+1-x+3=1 \Leftrightarrow$$

تمرين 3: حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات الآتية :

$$1. f(x) = xe^x + 2x$$

$$2. f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad (\text{الحل: } 1)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x - 1 \neq 0\} \quad (2)$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} : \text{ومنه } x = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0$$

تمرين 4: حل في $\mathbb{R}$ المترجمات التالية:

$$(1) e^{2x-1} \geq 1 \quad (2) e^{7x-1} \geq e^{2x-3} \times e^{x-2}$$

$$2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x-1} \geq e^0 \Leftrightarrow e^{2x-1} \geq 1 \quad (\text{الحل: } 1)$$

$$S = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[: \text{ومنه } x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{7x-1} \geq e^{2x-3+x-2} \Leftrightarrow e^{7x-1} \geq e^{2x-3} \times e^{x-2} \quad (2)$$

$$4x \geq -4 \Leftrightarrow 7x-1 \geq 2x-3+x-2 \Leftrightarrow$$

$$S = [-1; +\infty[: \text{ومنه } x \geq -1 \Leftrightarrow$$

(3) النهايات :

نقبل النهايتين التاليتين

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty : \text{خاصية 1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 : \text{خاصية 2}$$

تمرين 5: أحسب النهايات الآتية:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 1} \quad (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 3} \quad (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 2} \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \frac{1}{e^x} \right)$$

$$(\text{الحل: } 1) \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \quad \text{ولدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ إذن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \frac{1}{e^x} \right) = +\infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 2} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{شكل غير محدد}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty : \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(2 - \frac{1}{e^x} \right)}{e^x \left(1 + \frac{2}{e^x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{2}{e^x}} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 3} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{شكل غير محدد}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = +\infty : \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x \left(1 + \frac{3}{e^x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{e^x}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{2 \times 0 - 1}{0 + 1} = -1$$

(4) مشتقة الدالة e^x :

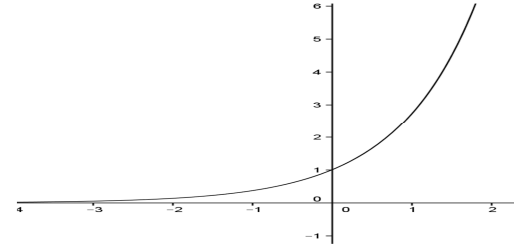
نقبل أن الدالة $\exp$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\text{ولدينا: } (e^x)' = e^x \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

(5) جدول تغيرات الدالة $e^x \rightarrow x$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

(6) منحنى الدالة $\exp$:



تمرين 6: أحسب $f'(x)$ في الحالات الآتية:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad (3) \quad f(x) = xe^x + 3x \quad (2) \quad f(x) = e^x + 2 \quad (1)$$

الحل: $f'(x) = (e^x + 2)' = (e^x)' + (2)' = e^x + 0 = e^x \quad (1)$

$$f'(x) = (xe^x + 3x)' = (xe^x)' + (3x)' = (x)'e^x + x(e^x)' + 3 = e^x + xe^x + 3 \quad (2)$$

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)' = \frac{(e^x - 1)' \times (e^x + 1) - (e^x - 1) \times (e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{e^x \times (e^x + 1) - (e^x - 1) \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x \times e^x + e^x - e^x \times e^x + e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

تمرين 7: نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x) = e^x + 3x$

(1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2) أحسب $f(0)$ و $f(1)$ (أعط قيمة مقربة للنتائج)

(3) أحسب $f'(x)$ و بين أن الدالة f تزايدية قطعاً على D_f

(4) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(5) حدد جدول تغيرات الدالة f

الحل: (1) $D_f = \mathbb{R}$

$$f(0) = e^0 + 3 \times 0 = 1 - 0 = 1 \quad (2)$$

$$f(1) = e^1 + 3 \times 1 = e + 3 \approx 2,7 + 3 \approx 5,7$$

$$f'(x) = (e^x + 3x)' = (e^x)' + (3x)' = e^x + 3 > 0 \quad (3)$$

لأن: $e^x > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$ ومنه f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 3x = 0 + 3(-\infty) = -\infty \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 3x = +\infty + 3(+\infty) = +\infty$$

(5) جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	