I. Probabilité

1) Généralités

Lors d'une **expérience aléatoire** :

- L'**univers** Ω est l'ensemble des **éventualités.**
- Un **événement** A est une partie de l'univers Ω.
- Un événement **élémentaire**, est un événement ne comportant qu'un seul élément.
- L'événement **contraire** de l'événement A est l'événement noté $\overline{A}$ formé de tous les éléments de Ω n'appartenant pas à A.
- L'événement A ∩ B (noté aussi "A et B") est l'événement formé des éléments de Ω appartenant à A et à B.
- L'événement A ∪ B (noté aussi "A ou B") est l'événement formé des éléments de Ω appartenant au moins à l'un des événements A ou B.
- Deux événements A et B sont dits **incompatibles** si A ∩ B = ∅.
- Si $\Omega=\{e_1;e_2;\cdots;e_n\}$ et si à chaque éventualité e_i on associe un nombre $p(e_i)$ tel que: $0\le p(e_i)\le 1$ et $p(e_1)+p(e_2)+\cdots+p(e_n)=1$, On dit que l'on a défini une **loi de probabilité** sur Ω.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

2) Propriétés :

Pour tous événements A et B :

- $P(\emptyset) = 0$; $P(\Omega) = 1$
- $0\le p(e_i)\le 1$; $p(\overline{A})=1-p(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  (si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$)
- Pour une loi **équirépartie** : $p(A)=\dfrac{nbre\ d'\text{é}l\text{é}ments\ de\ A}{nbre\ d'\text{é}l\text{é}ment\ de\ \Omega}=\dfrac{nbre\ de\ cas\ favorables}{nbre\ de\ cas\ possibles}$

3) Variable aléatoire

Définition : Une variable aléatoire X définie sur un univers Ω est une fonction qui à chaque éventualité associe un réel *xi*. La probabilité pour que X prenne la valeur x_i est alors notée $p(X=x_i)$ ou p_i .

Définir **la loi de probabilité** de X , c'est donner (sous forme d'un tableau) la probabilité de chacun des événements "$X=x_i$" .

x_i	x_1	x_2	…	x_k
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	…	p_k

- Espérance mathématique de X : $E(X)=\sum_{i=1}^{i=k} p_i\times x_i$

- Variance de X : $V(X)=E(X^2)-E^2(X)=\sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i^2-(E(X))^2$
- Écart-type de X : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Exemple :

On lance 3 fois de suite un dé. Le joueur gagne 6 dirhams s'il n'obtient aucun 1 et aucun 2 et il perd 3 dirhams dans le cas contraire.

La variable aléatoire X égale au gain du joueur, ne peut prendre que les valeurs −3 et 6.

On a : $p(X=6)=\frac{4^3}{6^3}=\frac{8}{27}$ et $p(X=-3)=1-p(X=6)=\frac{19}{27}$

x_i	6	-3	Total
$p(X=x_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{19}{27}$	1

$$E(X)=-3\times\frac{19}{27}+6\times\frac{8}{27}=-\frac{1}{3}$$

$$V(X)=(-3)^2\times\frac{19}{27}+6^2\times\frac{8}{27}-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{152}{9} \text{ et } \sigma(X)=\sqrt{\frac{152}{9}}=\frac{2\sqrt{38}}{3}$$

II. Probabilités conditionnelles

1. Définition:

Etant donné deux événements A et B ($B\neq\varnothing$) d'un univers Ω . On appelle probabilité de B sachant A, le réel noté $p_A(B)$ (ou $p(B/A)$) tel que : $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$

On a alors : $\boxed{p(A\cap B)=p(A)\times P_A(B)=p(B)\times p_B(A)}$

2. Formule des probabilités totales

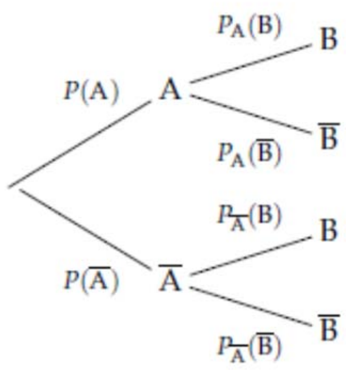
Si $A_1;A_2;\cdots;A_n$ forment une partition de Ω (2 à 2 incompatibles et leur union forme Ω),

Alors pour tout événement B, on a :

$$p(B)=p(A_1\cap B)+p(A_2\cap B)+\cdots+p(A_n\cap B)$$
$$=p(A_1)\times p_{A_1}(B)+p(A_2)\times p_{A_2}(B)+\cdots+p(A_n)\times p_{A_n}(B)$$

3. Représentation par un arbre pondéré

Le cas le plus fréquent correspond à la partition la plus simple (A et $\overline{A}$). Si on connaît les probabilités de B et $\overline{B}$ par l'intermédiaire de A et $\overline{A}$, on a l'arbre suivant :



- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.

  $p(A)\times p_A(B)=p(A\cap B)$

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).

  $p_A(B)+p_A(\overline{B})=1$

- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.

  $p(B)=p(A)\times p_A(B)+p(\overline{A})\times p_{\overline{A}}(B)$

Exemple :

On dispose de trois urnes $A, B\,et\,C$ la première contient 1 boule rouge et 5 boules vertes, la deuxième contient 3 boules rouges et une boule verte, et la troisième contient 1 boule rouge et 2 boules vertes.

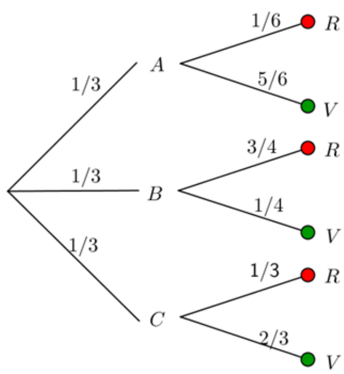
On choisit l'une des urnes au hasard et on tire une boule de cette urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

Soient $A, B\,et\,C$ les événements correspondants au choix de l'urne. Ils forment une partition de l'univers et on a $p(A)=p(B)=p(C)=\frac{1}{3}$.

Soit R l'événement « tirer une boule rouge ». La formule des probabilités totales nous donne:

$p(R)=p(A\cap R)+p(B\cap R)+p(C\cap R)$,

Donc: $p(R)=p(A)\times p_A(R)+p(B)\times p_B(R)+p(C)\times p_C(R)$.



Or $p_A(R)=\frac{1}{6}$, $p_B(R)=\frac{3}{4}$ et $p_C(R)=\frac{1}{3}$.

On a donc $p(R)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$.

4. Indépendance de deux événements

Deux événements A et B sont **indépendants** si et seulement si :

$p_A(B)=p(B) \Leftrightarrow p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

Exemple :

Une association de 96 membres propose différentes activités à ses adhérents, dont l'athlétisme et le basketball.

Douze membres s'inscrivent pour l'athlétisme, Trente-deux pour le basketball dont quatre pour les deux.

On prend au hasard la fiche d'un adhérent. On note A et B les événements :

- A « l'adhérent est inscrit pour l'athlétisme ».
- B « l'adhérent est inscrit pour le basketball ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ? En est-il de même pour A et $\overline{B}$?

On peut représenter les événements dans un tableau double entrée ci-contre

On calcule les probabilités suivantes : $P(A\cap B)$ et $P(A)\times P(B)$

	A	$\overline{A}$	Total
B	4	28	32
$\overline{B}$	8	56	64
Total	12	84	96

III. Loi binomiale

- On appelle épreuve de **Bernoulli** toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraire l'une de l'autre)
- On appelle schéma de Bernoulli toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes

Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est p.
Le schéma de Bernoulli consistant à répéter n fois de manière indépendante cette épreuve.
Si on note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S, la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p et est notée $\mathscr{B}(n;p)$

- Probabilité d'obtenir *k* succès : $p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$
- Espérance de X : $E(X)=\overline{X}=np$
- Variance et écart-type de X : $V(X)=np(1-p)$; $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

Exercice :
Un sac contient 6 boules blanches et 4 boules noires. On prélève au hasard et simultanément 3 boules de ce sac et on considère la variable aléatoire X associée au nombre de boules blanches tirées

1. Déterminer $X(\Omega)$ (les valeurs x_i que peut prendre la variable X
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X
3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$
4. On considère l'événement A:"$les\ 3\ boules\ sont\ blanches$" et on répète cette expérience exactement cinq fois
   Soit Y la variable aléatoire associée au nombre de fois l'apparition de l'évènement A
   a) Donner la loi de probabilité de Y
   b) Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de Y