

Définition :

La fonction Logarithme, est la fonction primitive de $x \rightarrow \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1. On note Ln ou bien Log.

Propriété 1 :

La fonction $x \rightarrow \ln(x)$ est une fonction continue et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Propriété 2 :

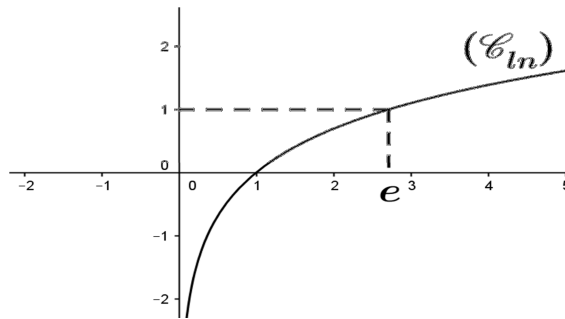
Pour tout a et b de $]0; +\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$ on a :

- ✓ $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- ✓ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- ✓ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- ✓ $\ln(a^r) = r \ln(a)$
- ✓ $\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln(a)$

Propriété 3 :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_*^{+2}$$

- ✓ $\ln(x) > \ln(y) \Leftrightarrow x > y$
- ✓ $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$
- ✓ $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- ✓ Pour tout $r \in \mathbb{Q} : \ln(e^k) = k$
- ✓ $\ln(x) = k \Leftrightarrow x = e^k$



Propriétés importantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x)) = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln|f(x)| = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(f(x)) = -\infty ;$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow l} f(x) = l \\ l > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow l} \ln(f(x)) = \ln(l)$$

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, de fonction dérivée $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, donc la fonction $\ln$ est **continue et strictement croissante**

sur $]0; +\infty[$. $(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Logarithme de base a (a ≠ 1 et a > 0)	
$(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$	$(\forall x > 0) \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$
$\log_a(1) = 0$	$\log_a(a) = 1$
$\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$	$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
$\forall r \in \mathbb{Q} : \log_a(x^r) = r \log_a(x)$	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

Logarithme décimal
$(\forall x > 0) \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$
$(\forall r \in \mathbb{Q}) : \log(10^r) = r$

*** Prof. Mohamed SELLAH ***

Limites importantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln(x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad (r \in \mathbb{Q}_+^*)$$