هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

Lycée Al Fath, Lqliâa
Inzegane-Ait-Melloul

**Série des exercices**

**Cours : les suites numériques**

Prof. Mohamed SELLAH
2BAC SGC et SE

## Exercice 1

Considérons la suite numérique $(u_n)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \quad ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Calculer $u_1$ et $u_2$
2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < 1$
3) a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)^2}{2 - u_n}$

   b- Déduire la monotonie de $(u_n)$, puis montrer qu'elle est convergente.
4) Posons $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$ , pour tout $n \in \mathbb{N}$

   a- Calculer $v_0$, et montrer que $(v_n)$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

   b- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \dfrac{v_n - 2}{v_n - 1}$

   c- Calculer $v_n$ en fonction de n, et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \dfrac{n}{n+1}$ . Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

## Exercice 2

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1- Calculer $u_1$ et $u_2$

2- a) Démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - 2 = \dfrac{u_n - 2}{3 - u_n}$

   b) démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n < 2$

   c) démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 2)^2}{3 - u_n}$

   d) déduire que la suite $(u_n)$ est croissante et qu'elle est convergente.

3- posant $v_n = \dfrac{1}{2 - u_n}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$

   a) calculer $v_{n+1} - v_n$ puis déduire que la suite $(v_n)$ est arithmétique de raison $r = 1$

   b) Calculer $v_0$ puis calculer $v_n$ en fonction de n

   c) Déduire que $u_n = 2 - \dfrac{1}{v_n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$ puis déduire que $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$; $\forall n \in \mathbb{N}$ . Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

## Exercice 3

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4} u_n + 3 \end{cases}$

1. Calculer $u_1$ et $u_2$
2. démontrer par récurrence que $u_n > 4$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$
3. a) démontrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-3}{4}(u_n - 4)$; $\forall n \in \mathbb{N}$

b) déduire que la suite $(u_n)$ est décroissante et qu'elle est convergente

4. Posant $v_n = u_n - 4$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Calculer $v_0$

b) Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$.

c) Calculer $v_n$ en fonction de n puis déduire que $u_n = 4\left(\dfrac{1}{4}\right)^n + 4$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$ . calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

## Exercice 4

soit $(u_n)_{IN}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} \ ; n \in N \end{cases}$

1 - Calculer $u_1$ et $u_2$

2 - a) Démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} + 1 = \dfrac{2(u_n + 1)}{3 + u_n}$

   b) démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > -1$

   c) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n + 1)^2}{3 + u_n}$

   b) déduire que la suite $(u_n)$ est décroissante et qu'elle est convergente.

3 - posant $v_n = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$

   a) calculer $v_0$

   b) calculer $v_{n+1} = \dfrac{3u_n + 5}{2(u_n + 1)}$

   c) démontrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$

   d) calculer $v_n$ en fonction de n

4 - a) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \dfrac{-v_n + 2}{v_n - 1}$ puis déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \dfrac{-n}{n+2}$

   b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma



**Exercice 5**

Considérons la suite numérique $(U_n)$ définie par : $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Calculer $u_1$ et $u_2$
2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > \frac{1}{2}$
3) a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{5}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$

   b- Déduire la monotonie de $(u_n)$, puis montrer qu'elle est convergente.

   c- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq 1$, et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{2} < u_n \leq 1$
4) Posons $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ , pour tout $n \in \mathbb{N}$

   a- Calculer $v_0$, et montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$.

   b- Calculer $v_n$ en fonction de n, et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \frac{1}{2}\left(11\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1\right)$

   c- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$
5) Posons $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots\dots + u_{n-1}$ montrer que $S_n = \frac{55}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) + \frac{n}{2}$

**Exercice 6**

Considérons la suite numérique $(u_n)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} \quad ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Calculer $u_1$ et $u_2$
2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > \frac{1}{2}$
3) a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$

   b- Déduire la monotonie de $(u_n)$, puis montrer qu'elle est convergente.

   c- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq 1$, et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{2} < u_n \leq 1$
4) Posons $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ , pour tout $n \in \mathbb{N}$

   a- Calculer $v_0$, et montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

   b- Calculer $v_n$ en fonction de n, et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

   c- Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

**Exercice 7**

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n + \frac{1}{6} \end{cases}$

1. démontrer par récurrence que $(\forall n \in N)\ u_n > 1$
2. démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante puis déduire que' elle est convergente.
1. posant : $v_n = u_n - 1$
   a) démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique à déterminer sa raison
   b) Calculer $v_n$ en fonction de n
   c) Calculer $u_n$ en fonction de n
   d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

**Exercice 8**

Considérons la suite suivante : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$

1- Calculer $u_1$ et $u_2$

2- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad u_n > 1$

3- a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n}$

   b- Étudier la monotonie de $(u_n)$ et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad u_n \leq 2$

   c- Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad 1 < u_n \leq 2$

4- Considérons la suite $(v_n)$ tel que $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1} ; n \in \mathbb{N}$

   a- Calculer $v_0$ et $v_1$

   b- Montrer que $(v_n)$ est arithmétique de raison $r = -1$ et déterminer $v_n$ en fonction de n.

   c- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1}$ et déduire $u_n$ en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

   d- Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \dots. + v_n$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma