

Exercice 1 :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{-1 + 2u_n}{u_n}$

On pose : pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{1}{-1 + u_n}$

1. Calculer u_1, u_2 et v_0
2. On utilisant une démonstration par récurrence, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq 2$
3. Montrer que (u_n) est une suite décroissante
4. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique, déterminer sa raison et son premier terme v_0
5. Calculer l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n
6. Calculer les sommes $S = v_1 + \dots + v_{10}$ et $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ en fonction de n

Exercice 2 :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n}$

1. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < 1$
b) Etudier les variations de la suite (u_n)
2. On pose : pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique, déterminer sa raison et son premier terme v_0
 - b. Calculer l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n
 - c. Calculer les sommes $S = v_1 + \dots + v_{10}$ et $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ en fonction de n

Exercice 3 :

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par: $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$

Dresser le tableau de variation de f .

2. On considère la suite (u_n) définie par:

$$u_0 = \frac{3}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = f(u_n)$$

a. Calculer u_1 et u_2 (donner les résultats sous forme de fractions irréductibles, puis sous forme décimales arrondies à 10^{-2} près).

b. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{3}{2}$ Démontrer que,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2} (u_n - \sqrt{2}) .$$

c. En déduire, par récurrence, que pour tout entier n , $0 < u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{2})$.

d. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 4 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \sqrt{10u_n}$.

On note f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{10x}$

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f et construire sur l'axe des abscisses les premiers termes $u_0; u_1; u_2; \dots$ de la suite (u_n) .
Quelles conjectures peut-on faire ?
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante, positive et majorée par 10.
3. En déduire que (u_n) converge vers une limite ℓ .
Déterminer cette limite ℓ .

Exercice 5 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 5$.

1. Calculer u_1 et u_2 . Tracer les droites d'équations $y = \frac{1}{3}x + 5$ et $y = x$. Construire sur ce graphique les premières termes $u_0; u_1; u_2; \dots$ de la suite.
Quelles conjectures peut-on faire ?
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n + h$. Déterminer le réel h pour que la suite (v_n) soit géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
3. Exprimer alors v_n , puis u_n , en fonction de n . En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}$

On admettra que f est dérivable sur $[0; +\infty[$.

1. Démontrer que f est croissante sur $[0; +\infty[$.
2. tracer dans un repère orthonormé la courbe (C) représentative de f ainsi que la droite (D) d'équation $y = x$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$. On note α la solution.

On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a) Tracer la courbe (C) et la droite (D) sur

l'intervalle $[0; 8]$. Puis, placer les points M_0 , M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0 , u_1 et u_2 .

Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

- b) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$. Où α est le réel défini dans la question
- c) Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.

5. Pour tout entier naturel n , on définit la suite (S_n) par : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

- a) Calculer S_0 , S_1 et S_2 . Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.

- b) Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$